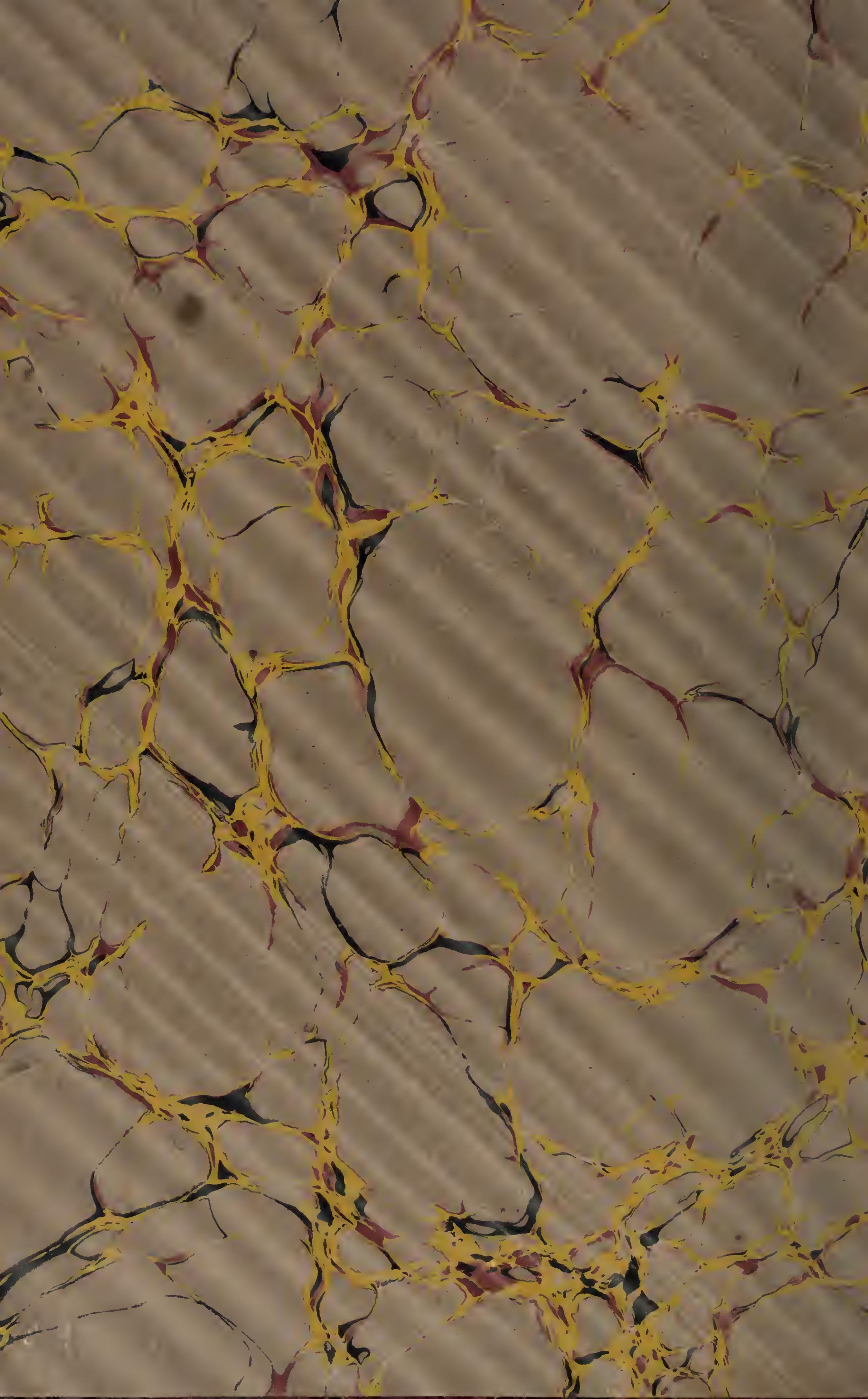
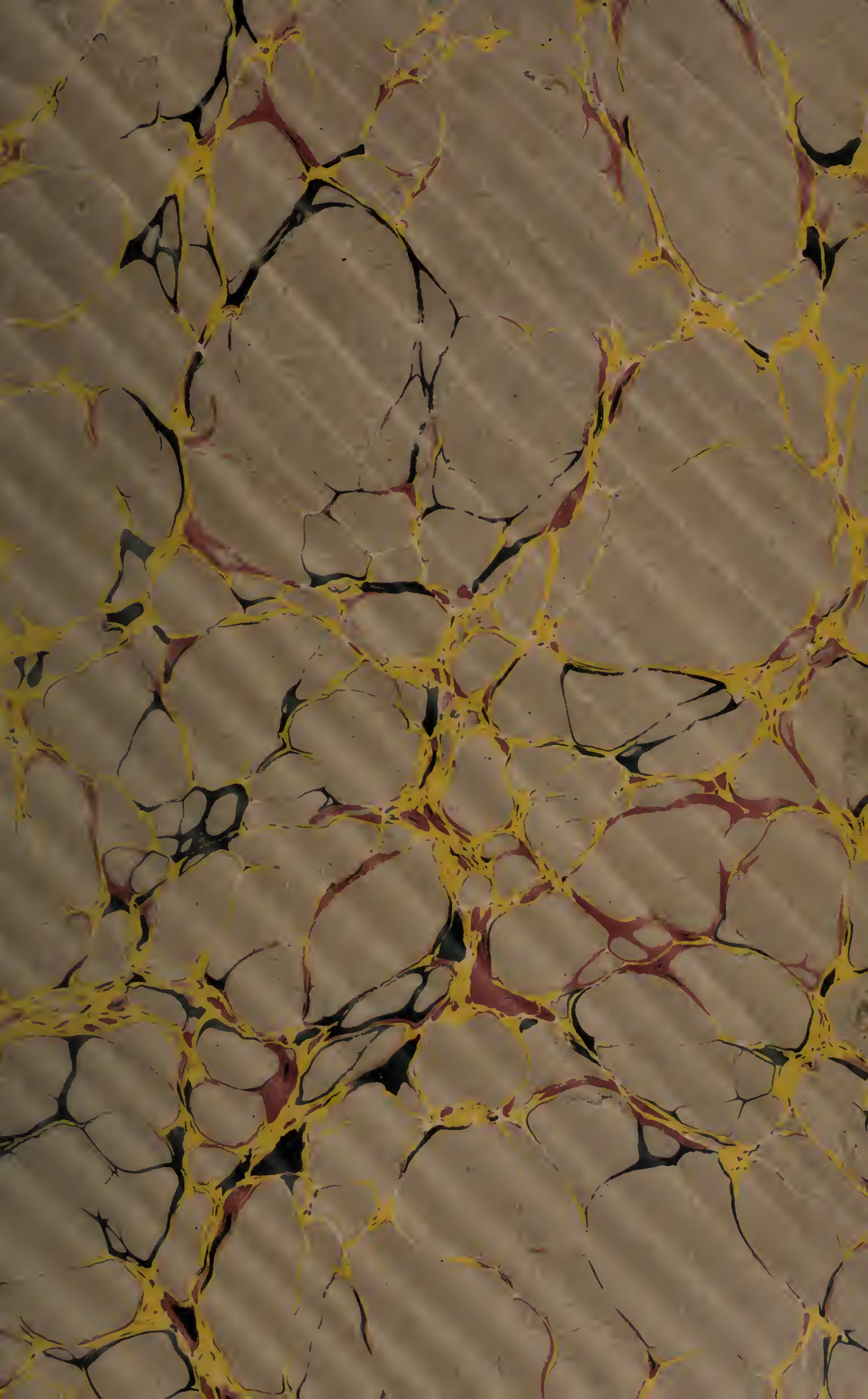

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01183212 8





LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME.

17555 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME,

PAR

P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
ET DE CRISTALLOGRAPHIE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

TOME II.

LES AIMANTS ET LES CORPS DIÉLECTRIQUES.





PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892



LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME.

TOME II.

LIVRE VII.

LES FORCES MAGNÉTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIÈRES DÉFINITIONS.

§ 1. — Pôles magnétiques (1).

Si l'on fait agir l'une sur l'autre deux aiguilles aimantées très minces, AB, A'B', on observe que le mouvement pris par l'aiguille AB peut toujours être attribué à quatre forces : deux sont appliquées au point A et dirigées suivant les droites A'A, B'A;

(1) Les premières idées nettes sur les actions mutuelles des aimants sont dues à Tobias Mayer [*Theoria magnetica* (*Gœtting. gel. Anz.*, 1760)] et à Æpinus [*Examen theoriæ magneticæ a Tob. Mayero propositæ* (*Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. XII, p. 325; 1766)].

deux autres sont appliquées au point B et dirigées suivant les droites A′B, B′B. Les extrémités des aiguilles auxquelles sont appliquées ces forces portent le nom de *pôles magnétiques* des aiguilles.

Supposons que A, A′ soient, pour nos deux aiguilles, les pôles qui, à Paris, se dirigent vers le nord, et B, B′ les pôles qui se dirigent vers le sud. On dit que les pôles A, A′ renferment du *magnétisme austral* et les pôles B, B′ du *magnétisme boréal.*

On observe que l'action de A′ sur A et l'action de B′ sur B sont toujours répulsives, tandis que l'action de B′ sur A et l'action de A′ sur B sont toujours attractives; d'où la loi :

Les pôles magnétiques de même nom se repoussent; les pôles magnétiques de noms contraires s'attirent.

L'action qu'un pôle magnétique, A′, par exemple, exerce sur un autre pôle magnétique, A, par exemple, est égale et de sens contraire à l'action que le pôle magnétique A exerce sur le pôle A′. *Les actions mutuelles des pôles magnétiques sont soumises à la loi de l'égalité entre l'action et la réaction.*

Lorsque plusieurs aiguilles aimantées A′B′, A″B″, ... agissent simultanément sur une même aiguille AB, les forces qui sollicitent cette dernière s'obtiennent en composant entre elles les forces qui la solliciteraient si elle subissait séparément l'action de l'aiguille A′B′, puis de l'aiguille A″B″, ...

L'action qu'un pôle magnétique A′ exerce sur un autre pôle magnétique A dépend de la distance r qui sépare ces deux pôles; elle décroît lorsque cette distance augmente. Tobie Mayer avait déjà soupçonné que cette action devait varier comme l'inverse du carré de la distance r. Coulomb [1] et, plus tard, Hansteen [2] ont démontré expérimentalement l'exactitude de cette proposition. Leurs expériences laissent beaucoup à désirer. Nous verrons, au prochain Chapitre, comment Gauss a établi cette loi avec une admirable précision. Provisoirement, nous laisserons indéterminée la fonction

---

(1) Coulomb, *Second Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme, où l'on détermine suivant quelles loix le fluide magnétique, ainsi que le fluide électrique, agissent, soit par répulsion, soit par attraction* (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences* pour 1785, p. 578).

(2) Hansteen, *Lettre à M. Œrsted, professeur à l'Université de Copenhague* (*Journal de Physique de Delamétherie,* t. LXXV, p. 418; 1812).

de la distance qui régit l'action mutuelle de deux pôles magnétiques.

Si, sur le pôle austral A d'une aiguille aimantée AB, nous faisons agir successivement, à la même distance R, les pôles de même nom a, a', a'', ... de diverses aiguilles ab, $a'b'$, $a''b''$, ... et les pôles de nom contraire b, b', b'', ... de ces mêmes aiguilles, nous observerons que les actions exercées sont différentes. Nous représenterons par F, F', F'', ..., f, f', f'', ... ces actions, les actions répulsives F, F', F'', ... étant comptées positivement, et les actions attractives f, f', f'' ... étant comptées négativement.

Lorsque le pôle austral A et la distance R ont été choisis une fois pour toutes, ces actions F, F', F'', ..., f, f', f'', ... caractérisent les pôles a, a', a'', ..., b, b', b'', ... On donne à ces actions le nom de *masses magnétiques* ou de *quantités de fluide magnétique* que renferment les pôles considérés.

D'après cette définition, *une masse magnétique australe est positive; une masse magnétique boréale est négative.*

On voit aussi, d'après cette définition, qu'un pôle de masse magnétique $(m + m')$ équivaut à la juxtaposition d'un pôle de masse magnétique m et d'un pôle de masse magnétique m'. Un pôle de masse magnétique o équivaut à l'absence de pôle magnétique.

L'expérience montre que *les masses magnétiques de signes contraires, placées aux deux pôles d'une même aiguille, sont égales en valeur absolue.*

Prenons les pôles a, a', a'', ..., b, b', b'', ...; plaçons-les successivement à une même distance r d'un même pôle quelconque P. Le pôle P subira des actions Φ, Φ', Φ'', ..., φ, φ', φ'', ... L'expérience montre que l'on a

$$\frac{\Phi}{F} = \frac{\Phi'}{F'} = \frac{\Phi''}{F''} = \ldots = \frac{\varphi}{f} = \frac{\varphi'}{f'} = \frac{\varphi''}{f''} = \ldots.$$

Les actions que divers pôles d'aimants exercent, à une même distance, sur un pôle quelconque, sont proportionnelles aux masses magnétiques que renferment ces pôles.

Il est facile de tirer de là la conclusion suivante :

Soient P et P' deux pôles magnétiques; soient m et m' les masses

magnétiques qui se trouvent en ces deux pôles; soit T l'action que ces deux pôles exercent l'un sur l'autre à la distance r, cette action étant comptée positivement lorsqu'elle est répulsive et négativement lorsqu'elle est attractive. On pourra écrire

$$T = mm' f(r),$$

$f(r)$ étant une fonction de la distance r, qui est la même pour tous les pôles d'aimants, qui est positive pour toute valeur de r, qui décroît lorsque r augmente.

La fonction $f(r)$ dépend du choix du pôle étalon A et de la distance R; si l'on remplace ce pôle et cette distance par un autre pôle et une autre distance, on augmente ou on diminue $f(r)$ dans un certain rapport indépendant de r.

Le choix du pôle A et de la distance R est arbitraire; le plus commode est le suivant : pour distance R, on prend l'unité de longueur; on choisit le pôle A, de façon qu'un pôle identique A', séparé du pôle A par l'unité de longueur, exerce sur le pôle A une action répulsive égale à l'unité de force.

D'après cette définition, on voit que la masse magnétique du pôle A' est égale à l'unité. Il en est de même de la masse magnétique du pôle A. *La masse magnétique du pôle étalon A est l'unité de masse magnétique;* elle est définie par cette propriété : *deux masses magnétiques égales à l'unité, séparées par une longueur égale à l'unité, exercent l'une sur l'autre une action répulsive égale à l'unité de force.*

On voit sans peine que cette définition équivaut à la condition suivante : *la fonction $f(r)$ devient égale à l'unité lorsque la distance r est prise égale à l'unité de longueur.*

§ 2. — Des éléments magnétiques. Action d'un aimant sur un pôle.

Ce qui précède ne s'applique qu'aux actions mutuelles des aiguilles aimantées qui sont très longues et très minces. Voici comment on peut étendre les considérations exposées au précédent paragraphe à l'étude des aimants quelconques (¹).

(¹) Cette extension est due à Coulomb [*Septième Memoire sur l'Électricite et le Magnétisme : du Magnétisme.* Art. XXX (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour 1789, p. 488)].

Prenons un corps aimanté de forme quelconque et découpons-le en éléments de volume. Nous admettrons que chacun de ces éléments de volume agit *sur un pôle d'aimant extérieur à l'aimant* comme s'il renfermait une certaine magnétique m, positive ou australe, placée en un de ses points a et une masse magnétique $(-m)$ égale à la précédente, de signe contraire et placée en un point b très voisin de a; en d'autres termes, nous regarderons les actions de cet élément comme identiques aux actions d'une petite aiguille aimantée placée selon ba. Les définitions et les propositions données dans ce qui précède pour les aiguilles aimantées s'étendront maintenant aisément aux actions exercées par un aimant quelconque sur un pôle magnétique qui lui est extérieur.

Considérons un élément magnétique dv ou ba, et cherchons son action [1] sur la masse magnétique M placée en A.

La masse m, située en a, exerce sur la masse M une action

$$F = Mmf(r),$$

r désignant la distance aA et la force F étant dirigée suivant aA.

La masse $(-m)$, située en b, exerce sur la masse M une action

$$F' = -Mmf(r'),$$

r' désignant la distance bA, et la force F' étant dirigée suivant bA.

Si l'on déplace l'un par rapport à l'autre le pôle A et l'élément, les forces précédentes et les actions égales et directement opposées que le pôle A exerce sur l'élément effectuent un travail

$$d\mathfrak{T} = F\,dr + F'\,dr' = Mm\,[f(r)\,dr - f(r')\,dr'].$$

Soit $\varphi(r)$ une fonction quelconque de r, telle que

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -f(r),$$

nous aurons

$$d\mathfrak{T} = -Mm\,\delta\,[\varphi(r) - \varphi(r')].$$

Désignons par l la direction ba; par dl la longueur ba; nous aurons

$$r' = r - \frac{\partial r}{\partial l}\,dl = r + \cos(r, l)\,dl$$

---

[1] Tout ce qui suit est dû à Poisson [*Mémoire sur la Théorie du magnétisme* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. V, p. 247; 1824)].

et, par conséquent,

$$d\mathcal{T} = -\mathrm{M}\,m\,dl\,\delta\,[f(r)\cos(r, l)].$$

Les actions mutuelles d'un élément magnétique et d'un pôle d'aimant admettent un potentiel qui a pour valeur

$$(1) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{M}\,m\,dl\,f(r)\cos(r, dl).$$

Les actions mutuelles d'un aimant quelconque et d'un pôle d'aimant admettent un potentiel, qui s'obtient en faisant la somme des potentiels de chacun des éléments magnétiques sur le pôle.

Posons

$$(2) \qquad \mathcal{V} = \sum f(r)\cos(r, l)\,m\,dl,$$

le signe $\sum$ indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments magnétiques qui composent un aimant. La fonction $\mathcal{V}$, définie par cette égalité, est ce qu'on nomme la *fonction potentielle magnétique de l'aimant au point* A.

Le potentiel mutuel de l'aimant et d'une masse magnétique M, placée au point A, a alors pour valeur

$$(3) \qquad \Pi = \mathrm{M}\mathcal{V}.$$

On voit qu'un élément magnétique ne figure, dans l'expression de la fonction potentielle, que par la direction l et la valeur du produit $m\,dl$.

La direction l ou ba est ce que l'on nomme la *direction de l'aimantation en un point de l'élément.*

Le produit $m\,dl$ est ce que l'on nomme le *moment magnétique de l'élément.*

Soit dv le volume de l'élément, et posons

$$m\,dl = \mathfrak{M}\,dv.$$

$\mathfrak{M}$ est une quantité qui a, en tout point de l'aimant, une valeur finie, et que nous nommerons l'*intensité d'aimantation en un point.*

On voit, par ce qui précède, que *les actions mutuelles d'un aimant et d'un pôle extérieur à cet aimant sont complètement définies lorsque l'on connaît la grandeur et la direction de l'aimantation en tout point de l'aimant.*

Sur la ligne l, dans la direction de cette ligne, portons une longueur égale à $\mathfrak{M}$. Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ les projections de cette grandeur sur trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. Ces trois quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont *les trois composantes de l'aimantation en un point de l'élément dv.*

La connaissance de ces trois quantités en tout point d'un aimant suffit à définir l'action de cet aimant sur tout pôle extérieur, car l'intensité de l'aimantation est alors donnée en tout point par l'égalité

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2)^{\frac{1}{2}}$$

et la direction de l'aimantation est définie par

$$\cos(l, x) = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}}, \qquad \cos(l, y) = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}}, \qquad \cos(l, z) = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}}.$$

Ces relations permettent de donner une forme commode à la fonction potentielle magnétique définie par l'égalité (2).

On a, en effet,

$$m\,dl = \mathfrak{M}\,dv,$$

$$\cos(r, l) = \cos(r, x)\cos(l, x) + \cos(r, y)\cos(l, y) + \cos(r, z)\cos(l, z).$$

Soient x, y, z les coordonnées du point A, et ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de l'élément dv. On aura

$$\cos(r, x) = -\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad \cos(r, y) = -\frac{\partial r}{\partial y}, \qquad \cos(r, z) = -\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Si donc, comme nous l'avons déjà fait, on définit la fonction $\varphi(r)$ par l'égalité

$$(4) \qquad \frac{d\varphi(r)}{dr} = -f(r),$$

la fonction potentielle magnétique au point A aura pour expression

$$(5) \qquad \mathfrak{V}(x, y, z) = \int \left[\mathfrak{A}\frac{\partial \varphi(r)}{\partial \xi} + \mathfrak{B}\frac{\partial \varphi(r)}{\partial \eta} + \mathfrak{C}\frac{\partial \varphi(r)}{d\zeta} \right] dv.$$

Dans la suite de cet Ouvrage, nous rencontrerons constamment des expressions de la forme

$$fg + f_1 g_1 + f_2 g_2,$$

f_1 et f_2 se déduisant de f et g_1 et g_2 de g par permutation tournante.

Pour abréger les formules, nous représenterons une semblable expression par

$$\| f g \|.$$

Moyennant cette notation, la formule précédente devient

$$\mathcal{V} = \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial \xi} \right\| dv.$$

D'après la formule (3), on voit qu'une masse magnétique M, placée au point (x, y, z) extérieur à l'aimant, subit, de la part de cet aimant, une action dont les composantes sont

$$(6) \qquad \begin{cases} X = -M \dfrac{\partial \mathcal{V}}{dx}, \\ Y = -M \dfrac{\partial \mathcal{V}}{dy}, \\ Z = -M \dfrac{\partial \mathcal{V}}{dz}. \end{cases}$$

En effet, si l'on donne au pôle A un déplacement dont les composantes soient δx, δy, δz, sans déplacer l'aimant, les actions mutuelles de l'aimant et du pôle devront effectuer un travail

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

Mais, d'après l'expression du potentiel mutuel de l'aimant et du pôle que donne la formule (3), ce travail doit aussi avoir pour valeur

$$-M \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{dx} \delta x + \frac{\partial \mathcal{V}}{dy} \delta y + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \delta z \right),$$

ce qui démontre l'exactitude des formules (6).

§ 3. — Potentiel mutuel de deux aimants.

Ayant le potentiel d'un aimant sur un pôle magnétique, nous pouvons trouver le potentiel d'un aimant sur un autre élément magnétique.

Soient A et B les pôles de ce dernier; soit L la direction de son axe magnétique; soit dL la distance BA. Le point A a pour coordonnées x, y, z, et le point B $\left(x - \frac{dx}{dL} dL\right)$, $\left(y - \frac{dy}{dL} dL\right)$,

$\left(z - \frac{dz}{dL} dL\right)$. Les deux pôles A et B renferment des masses magnétiques M et — M.

Soit dv' un élément de volume de l'aimant; soient (x', y', z') un point de cet élément; $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ les composantes de l'aimantation en ce point; r la distance de ce point au point A; r_1 la distance de ce point au point B.

D'après les égalités (3) et (5), l'aimant et le pôle A ont un potentiel mutuel

$$\mathrm{H} = \mathrm{M} \int \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x'} \right\| dv'.$$

De même, l'aimant et le pôle B ont un potentiel mutuel

$$\mathrm{H}_1 = - \mathrm{M} \int \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \varphi(r_1)}{\partial x'} \right\| dv'.$$

Mais on a

$$r_1 = r - \frac{\partial r}{\partial \mathrm{L}} d\mathrm{L}$$

et

$$\mathrm{M}\, d\mathrm{L} = \mathfrak{M}\, dv,$$

dv étant le volume de l'élément et $\mathfrak{M}$ son aimantation.

Le potentiel mutuel de l'aimant v' et de l'élément dv a donc pour valeur

$$(7) \qquad \varpi = \mathfrak{M}\, dv \int \frac{\partial}{\partial \mathrm{L}} \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x'} \right\| dv'.$$

Cette expression peut se transformer de diverses façons. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial \mathrm{L}} \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x'} \right\| dv' = & \frac{dx}{d\mathrm{L}} \frac{\partial}{\partial x} \int \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x'} \right\| dv' \\ & + \frac{dy}{d\mathrm{L}} \frac{\partial}{\partial y} \int \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x'} \right\| dv' \\ & + \frac{dz}{dl} \frac{\partial}{\partial z} \int \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x'} \right\| dv', \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire, d'après l'égalité (5), en désignant par $\mathcal{V}'(x, y, z)$ la fonction potentielle de l'aimant v' au point (x, y, z),

$$\int \frac{\partial}{\partial \mathrm{L}} \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x'} \right\| dv' = \left\| \frac{dx}{dl} \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial x} \right\|.$$

On a, d'ailleurs,

$$\mathfrak{M} \frac{dx}{d\mathrm{L}} = \mathcal{A}, \qquad \mathfrak{M} \frac{dy}{dl} = \mathcal{B}, \qquad \mathfrak{M} \frac{dz}{dl} = \mathcal{C},$$

en sorte que l'égalité (7) peut s'écrire :

$$(8) \qquad \varpi = \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial x} \right\| dv.$$

On voit aussi, d'après les calculs précédents, que l'on peut écrire

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varpi = dv \Big\{ &\mathcal{A} \int \left[\mathcal{A}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x \partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x \partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x \partial z'} \right] dv' \\ &+ \mathcal{B} \int \left[\mathcal{A}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y \partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y \partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y \partial z'} \right] dv' \\ &+ \mathcal{C} \int \left[\mathcal{A}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z \partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z \partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z \partial z'} \right] dv' \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules trouvées, on obtient aisément, par sommation, le potentiel des actions mutuelles d'un aimant v et d'un autre aimant v'. D'après la formule (8), ce potentiel peut s'écrire

$$(10) \qquad \mathfrak{P} = \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial x} \right\| dv.$$

Il est évident, par raison de symétrie, que l'on peut aussi bien l'écrire

$$(10\ bis) \qquad \mathfrak{P} = \int \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x'} \right\| dv'.$$

La forme symétrique de ce potentiel est en évidence dans l'expression que l'on obtient en partant de la formule (9)

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P} = \int\int \Big[&\mathcal{A}\mathcal{A}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x\, \partial x'} + \mathcal{A}\mathcal{B}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x\, \partial y'} + \mathcal{A}\mathcal{C}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x\, \partial z'} \\ &+ \mathcal{B}\mathcal{A}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y\, \partial x'} + \mathcal{B}\mathcal{B}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y\, \partial y'} + \mathcal{B}\mathcal{C}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y\, \partial z'} \\ &+ \mathcal{C}\mathcal{A}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z\, \partial x'} + \mathcal{C}\mathcal{B}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z\, \partial y'} + \mathcal{C}\mathcal{C}' \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z\, \partial z'} \Big] dv\, dv'. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière formule renferme les lois des forces qui s'exercent entre deux aimants de forme quelconque. Elle nous montre que toutes ces lois peuvent être regardées comme les conséquences de la définition suivante, que nous conserverons désormais à l'exclusion de toute autre, comme *définition des aimants :*

Un aimant est défini par la connaissance d'une certaine grandeur géométrique, l'aimantation, affectée à chacun des points de sa masse.

Les actions mutuelles de deux aimants rigides admettent un potentiel donné par l'une quelconque des trois formules équivalentes (10), (10 *bis*) *et* (11); $\varphi(r)$ *est une fonction de* r, *dont la forme sera déterminée ultérieurement.*

Tout ce qui précède cette définition doit être regardé comme une simple introduction à cette définition.

§ 4. — Forces qui agissent sur un aimant rigide.

Un aimant rigide v est soumis à l'action d'un certain nombre d'autres aimants. Les actions qu'il subit peuvent toujours se réduire à une force (X, Y, Z) appliquée en un certain point O de l'aimant, et à un couple (L, M, N). On peut aisément calculer cette force et ce couple lorsqu'on connaît la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}'$ des aimants agissants.

Prenons le point O pour origine des coordonnées et nous trouverons, en faisant usage du principe des vitesses virtuelles et de la formule (10),

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= -\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x\,\partial z}\right)dv,\\
Y &= -\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial y^2} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial y\,\partial z}\right)dv,\\
Z &= -\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial z\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial z\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial z^2}\right)dv,\\
L &= -\int\left(\left\|\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x\,\partial z}\right\|y - \left\|\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x\,\partial y}\right\|z\right)dv - \int\left(\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial z} - \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial y}\right)dv.\\
M &= -\int\left(\left\|\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x^2}\right\|z - \left\|\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x\,\partial z}\right\|x\right)dv - \int\left(\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x} - \mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial z}\right)dv.\\
N &= -\int\left(\left\|\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x\,\partial y}\right\|x - \left\|\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}'}{\partial x^2}\right\|y\right)dv - \int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial y} - \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x}\right)dv.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules permettront, en toutes circonstances, de trouver le mouvement d'un aimant rigide soumis à l'action d'aimants donnés et de forces étrangères données.

§ 5. — Actions d'aimants éloignés. Moment magnétique.

Nous terminerons ce Chapitre par deux propositions relatives à l'action d'un aimant très éloigné sur un pôle d'aimant et aux actions mutuelles de deux aimants très éloignés. Ces propositions nous seront utiles au Chapitre suivant.

Le potentiel d'un aimant sur un pôle d'aimant M est donné par les formules (3) et (5). Supposons le pôle d'aimant M extrêmement éloigné de l'aimant. Soit ρ la distance d'un point O (ξ, η, ζ), intérieur à l'aimant, au pôle M. Le terme principal du potentiel sera

$$P = M \int \left[\mathcal{A} \frac{\partial \varphi(\rho)}{\partial \xi} + \mathcal{B} \frac{\partial \varphi(\rho)}{\partial \eta} + \mathcal{C} \frac{\partial \varphi(\rho)}{\partial \zeta} \right] dv.$$

Posons

$$(13) \qquad A = \int \mathcal{A}\, dv, \qquad B = \int \mathcal{B}\, dv, \qquad C = \int \mathcal{C}\, dv.$$

La formule précédente pourra s'écrire

$$P = -M f(\rho) \left(A \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + B \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + C \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right).$$

Si l'on compare cette formule à la formule (1), on arrive à la proposition suivante :

Pour calculer les actions mutuelles d'un aimant et d'un pôle d'aimant très éloignés l'un de l'autre, on peut remplacer l'aimant par un élément magnétique situé en un de ses points et dont le moment magnétique serait la grandeur géométrique (A, B, C), *définie par les égalités* (13).

La direction de la grandeur géométrique (A, B, C) porte le nom d'*axe magnétique de l'aimant ;* sa grandeur est le *moment magnétique de l'aimant.*

Le potentiel mutuel de deux aimants est donné par l'égalité (11). Supposons ces deux aimants très éloignés. Soit ρ la distance d'un point O (ξ, η, ζ) du premier à un point O$'(\xi', \eta', \zeta')$ du second. Définissons encore A, B, C par les égalités (13) et posons de même

$$A' = \int \mathcal{A}' dv', \qquad B' = \int \mathcal{B}' dv', \qquad C' = \int \mathcal{C}' dv'.$$

Le terme principal du potentiel mutuel des deux aimants sera

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AA'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\xi\,\partial\xi'} + \mathrm{AB'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\xi\,\partial\eta'} + \mathrm{AC'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\xi\,\partial\zeta'}\\
&+ \mathrm{BA'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\eta\,\partial\xi'} + \mathrm{BB'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\eta\,\partial\eta'} + \mathrm{BC'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\eta\,\partial\zeta'}\\
&+ \mathrm{CA'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\zeta\,\partial\xi'} + \mathrm{CB'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\zeta\,\partial\eta'} + \mathrm{CC'}\frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial\zeta\,\partial\zeta'}.
\end{aligned}$$

L'action mutuelle de deux aimants très éloignés est la même que l'action de deux éléments magnétiques dont chacun serait situé à l'intérieur d'un de ces aimants et aurait même moment magnétique et même direction d'axe magnétique que cet aimant.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DE LA LOI DES ACTIONS MAGNÉTIQUES ET DE L'INTENSITÉ DU MAGNÉTISME TERRESTRE.

§ 1. — Définition des éléments du magnétisme terrestre.

La Terre agit sur les aimants; les premières idées nettes sur ces actions sont dues à Coulomb [1], qui en a résumé les lois de la manière suivante :

L'action F, *que la terre exerce à un instant donné sur un pôle magnétique de masse m, placé en un point donné, est une grandeur géométrique donnée par l'égalité*

$$F = mT,$$

T *étant une grandeur géométrique entièrement définie à chaque instant et en chaque point du globe.*

La direction de la grandeur géométrique T est ce que l'on nomme la *direction de l'action magnétique terrestre;* la valeur de T est l'*intensité du magnétisme terrestre.*

L'angle que la direction T fait avec le plan horizontal du lieu est ce que l'on nomme l'*inclinaison magnétique;* l'inclinaison magnétique est comptée positivement lorsque la direction T perce le plan horizontal de haut en bas; l'inclinaison magnétique est positive dans les régions que nous habitons.

---

[1] COULOMB, *Recherches sur la meilleure manière de fabriquer les aiguilles aimantées, de les suspendre, de s'assurer qu'elles sont dans le véritable méridien magnétique, enfin de rendre raison de leurs variations diurnes régulières* (*Mémoires des Savants étrangers*, t. IX, p. 165; 1780). On trouvera une bibliographie très complète des écrits relatifs au magnétisme terrestre dans Verdet : *Leçons sur le magnétisme terrestre* (*Œuvres de Verdet*, t. IV).

Le demi-plan mené par la verticale du lieu d'observation et la direction de la force magnétique terrestre, et le demi-plan constitué par la portion du méridien géographique située au nord de la verticale, forment un dièdre qui porte le nom de *déclinaison magnétique*. Si le premier demi-plan est à l'orient du méridien géographique, la déclinaison est comptée positivement. Dans les régions que nous habitons, à notre époque, la déclinaison est occidentale, c'est-à-dire négative.

Soit O un lieu d'observation. Menons en ce point un système d'axes rectangulaires constitué de la manière suivante :

L'axe des x est tangent à la méridienne du lieu et dirigé vers le nord; l'axe des y est tangent au parallèle du lieu et dirigé vers l'est; l'axe des z est vertical et dirigé vers le haut. Soient X, Y, Z les composantes, suivant ces trois axes, de l'action magnétique terrestre. Nous aurons, en désignant par i l'inclinaison et par δ la déclinaison,

$$\begin{aligned} X &= \quad T\cos i\cos\delta, \\ Y &= \quad T\cos i\sin\delta, \\ Z &= -T\sin i. \end{aligned}$$

Soit H la projection de la grandeur T sur le plan horizontal. Nous aurons

$$H = T\cos i$$

et les formules précédentes pourront s'écrire

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \quad H\cos\delta, \\ Y &= \quad H\sin\delta, \\ Z &= -H\,\mathrm{tang}\,i. \end{aligned}\right.$$

La quantité H est ce que l'on nomme la *composante horizontale de l'action magnétique terrestre*.

A la loi précédente, qui résume les observations faites au sujet de l'action que la terre exerce sur un aimant, on peut substituer la suivante, qui revient au même lorsqu'il s'agit seulement de calculer les forces par lesquelles la terre sollicite un aimant, mais qui peut s'étendre à l'étude d'autres phénomènes :

La terre se comporte, en chaque point O *qui lui est exté-*

rieur, comme un aimant dont la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}$ *vérifie en ce point* O *les égalités suivantes :*

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{V}}{dx} = -\mathrm{H}\cos\delta, \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{dy} = -\mathrm{H}\sin\delta, \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{dz} = \mathrm{H}\,\mathrm{tang}\,i, \end{cases}$$

H, i, δ *étant trois quantités qui ont une valeur donnée à chaque instant et en chaque point du globe et que l'on nomme les éléments du magnétisme terrestre en ce point.*

Ces éléments une fois connus, il est facile d'exprimer les lois de l'action de la terre sur un aimant quelconque. Nous supposerons cet aimant assez petit par rapport aux dimensions de la terre pour que l'on puisse regarder les quantités H, i, δ comme des constantes au voisinage du lieu d'observation. Alors, les trois premières égalités (12) du Chapitre précédent, jointes aux formules (2), donneront pour composantes de la force appliquée à l'aimant

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0.$$

L'action de la terre sur un aimant quelconque se réduit à un couple.

On sait comment Coulomb a vérifié cette proposition par l'expérience.

Les trois dernières formules (12) du Chapitre précédent, jointes aux égalités (2), donnent, pour expressions des composantes de ce couple,

$$\lambda = -\mathrm{H}\left(\mathrm{tang}\,i\int \mathfrak{B}\,dv + \sin\delta \int \mathfrak{C}\,dv\right),$$

$$\mu = \mathrm{H}\left(\cos\delta \int \mathfrak{C}\,dv + \mathrm{tang}\,i\int \mathfrak{A}\,dv\right),$$

$$\nu = \mathrm{H}\left(\sin\delta \int \mathfrak{A}\,dv - \cos\delta \int \mathfrak{B}\,dv\right),$$

ou bien, en désignant par A, B, C les composantes du moment

magnétique de l'aimant suivant les trois axes Ox, Oy, Oz,

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda = -H(B \tang i + C \sin\delta), \\ \mu = H(C \cos\delta + A \tang i), \\ \nu = H(A \sin\delta - B \cos\delta). \end{cases}$$

Ces formules servent à la détermination des trois éléments du magnétisme terrestre. La détermination de la déclinaison et de l'inclinaison se fait au moyen des boussoles; nous n'étudierons pas ici ces instruments, sur lesquels les traités classiques renferment des détails suffisants. Nous nous occuperons seulement de la détermination de H.

Soit M le moment magnétique d'un aimant. La détermination de H s'obtient en déterminant successivement, pour ce même aimant, les deux quantités MH et $\frac{M}{H}$. On obtient ainsi, non seulement la valeur de l'intensité horizontale du magnétisme terrestre, mais encore la valeur du moment magnétique de l'aimant.

Nous allons exposer les méthodes qui permettent de déterminer successivement, pour un même aimant, les deux quantités MH et $\frac{M}{H}$.

§ 2. — Détermination de MH.

Coulomb [1] a montré le premier comment on pouvait, pour un aimant donné, déterminer le produit de son moment magnétique M par la composante horizontale du magnétisme terrestre H; il a employé, dans ce but, deux méthodes : l'une fondée sur les lois de la torsion, l'autre sur les lois des petites oscillations. Cette dernière a reçu de Gauss de grands perfectionnements qui la rendent extrêmement précise; nous allons l'exposer sous la forme que Gauss lui a donnée [2].

Considérons un aimant suspendu à un paquet de fils de cocon de telle façon que son axe magnétique soit horizontal. Supposons cet aimant très peu dévié de sa position d'équilibre et abandonné

---

[1] COULOMB, *Septième Mémoire sur l'électricité et le magnétisme : Du magnétisme*, art. II (*Mémoires de l'Académie des Science*, p. 455; 1789).

[2] GAUSS, *Intensitas vis magneticæ terrestris ad mensuram absolutam revocata* (*Commentationes de Gœttingue*, t. VIII; 1841. — GAUSS, *Werke*, Bd. V, p. 81).

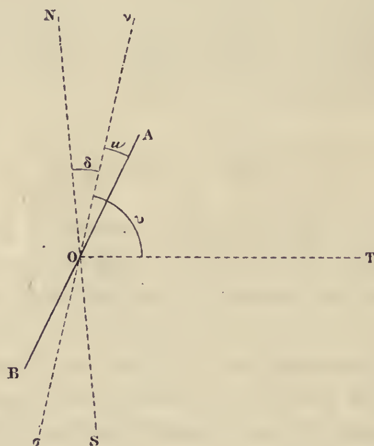
à lui-même. Il exécutera, de part et d'autre de sa position d'équilibre, des oscillations isochrones. Soit t la durée des oscillations, K le moment d'inertie de l'appareil oscillant, $\mathfrak{M}\,d\omega$ le moment du couple qui tend à ramener l'aiguille à sa position d'équilibre lorsqu'elle en est déviée d'un angle $d\omega$; nous aurons, d'après la théorie du pendule composé,

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi^2 K}{t^2}. \tag{4}$$

La quantité $\mathfrak{M}$ est la somme de deux termes : l'un provient de l'action du magnétisme terrestre, l'autre provient de la torsion des fils de cocon.

Si les fils étaient sans torsion, l'axe magnétique de l'aimant se placerait suivant la direction $\sigma\nu$ (*fig.* 1) de la méridienne magné-

Fig. 1.



tique, à l'est de la méridienne géographique et faisant avec elle un angle δ égal à la déclinaison.

Si le magnétisme terrestre n'agissait pas, l'axe magnétique prendrait, sous l'action de la torsion des fils, une direction OT faisant un angle v avec la méridienne magnétique.

Soumis à ces deux actions, l'axe magnétique prend une orientation OA intermédiaire entre les deux précédentes ; soit u l'angle νOA qu'il fait avec la méridienne magnétique.

Dans ces conditions, on a

$$A = M \cos(u + \delta), \qquad B = M \sin(u + \delta).$$

Le couple, dû à l'action du magnétisme terrestre, qui agit sur l'aiguille, a pour composante suivant la verticale, d'après la dernière égalité (3),

$$v = - MH \sin u.$$

L'angle de torsion est $(v - u)$ et le couple de torsion a pour moment par rapport à l'axe de suspension

$$\theta(v - u),$$

θ étant une quantité positive qui dépend de la nature du fil, de son état hygrométrique (influence que l'on élimine par des substances desséchantes), enfin de la charge que porte le paquet de fils.

Le couple qui agit sur l'aimant a pour moment, par rapport à l'axe de suspension,

$$\theta(v - u) - MH \sin u.$$

La valeur ω que prend l'angle u lorsque l'équilibre est établi est donc donnée par l'égalité

$$(5) \qquad MH \sin\omega = \theta(v - \omega).$$

C'est cette égalité qui servait à Coulomb dans la détermination de MH par la balance de torsion.

Si l'on donne à u une valeur $(\omega + d\omega)$ voisine de celle qui convient à l'équilibre, le moment par rapport à l'axe de suspension du couple qui agit sur l'aimant prendra la valeur

$$-(MH \cos\omega + \theta)\, d\omega.$$

Nous avons donc, d'après la définition de $\mathfrak{M}$,

$$(6) \qquad \mathfrak{M} = MH \cos\omega + \theta.$$

Le moment de torsion du fil de cocon est très faible par rapport au moment du couple dû au magnétisme terrestre; θ est très petit par rapport à MH; donc, d'après l'égalité (5), l'angle ω est très petit en valeur absolue; on peut, en négligeant les quantités

de l'ordre de ω^2, remplacer $\sin\omega$ par ω et $\cos\omega$ par 1. Posons alors

$$n = \frac{MH}{\theta} \tag{7}$$

et l'égalité (5) deviendra

$$n = \frac{v - \omega}{\omega}, \tag{5 bis}$$

tandis que l'égalité (6) deviendra

$$\mathfrak{M} = MH\frac{n+1}{n}.$$

Cette valeur, reportée dans l'égalité (4), donne

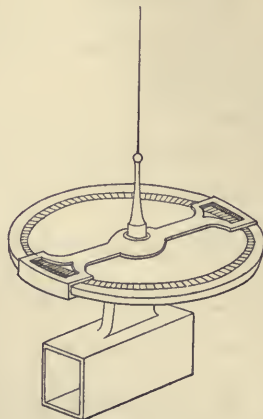
$$MH = \frac{n}{n+1}\frac{\pi^2 K}{t^2}. \tag{6 bis}$$

L'équation (5 *bis*) va nous permettre de déterminer la valeur du coefficient n.

On ne connaît, en général, aucune des trois directions $\varpi\nu$, BA, OT; on ne connaît donc ni ω, ni v; mais une disposition spéciale permet de faire varier l'angle de torsion d'une quantité connue.

A cet effet, les fils de cocons sont encastrés, à leur partie inférieure, au centre d'un cercle divisé (*fig.* 2), tandis que l'étrier

Fig. 2.



qui soutient l'aimant est invariablement lié à une alidade mobile sur ce cercle. En faisant tourner le cercle d'un angle V de gauche

à droite, on augmente d'une quantité connue V l'angle inconnu φ. L'aiguille est déviée vers l'est d'un angle Ω, très exactement observable par la méthode de Poggendorff. Le nouvel angle ω est donc $(\omega + \Omega)$, et le nouvel angle φ, $(\varphi + V)$. On a alors

$$n = \frac{(\varphi + V) - (\omega + \Omega)}{\omega + \Omega},$$

ce qui, comparé à l'égalité (5 *bis*), donne

$$n = \frac{V - \Omega}{\Omega}.$$

La quantité n est alors donnée en fonction de quantités mesurables.

Au lieu de faire une seule fois varier l'angle φ, on lui donne un grand nombre de variations, de manière à prendre la moyenne des déterminations obtenues pour n. Il est alors nécessaire, l'expérience durant très longtemps, de tenir compte des variations subies pendant ce temps par la déclinaison terrestre. On tient compte de ces variations au moyen d'un second appareil semblable au précédent. Il s'agit d'évaluer un terme correctif fort petit; on peut, dans la lecture des indications du second appareil, négliger la torsion des fils, qui ne ferait qu'apporter une perturbation très petite par rapport à la valeur déjà très petite de ce terme.

Si l'on désigne par d la quantité dont on a augmenté la déclinaison pendant que φ a augmenté de V, on aura

$$n = \frac{(\varphi + V - d) - (\omega + \Omega - d)}{\omega + \Omega - d},$$

ce qui, joint à l'égalité (5 *bis*), donne

$$n = \frac{V - \Omega}{\Omega - d}.$$

Si, de même, $\delta + d'$, $\delta + d''$, ... représentent les valeurs prises par la déclinaison aux instants où l'on a donné à φ les valeurs $\varphi + V'$, $\varphi + V''$, ..., on aura

$$n = \frac{V' - \Omega'}{\Omega' - d'},$$

$$n = \frac{V'' - \Omega''}{\Omega'' - d''},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il suffira de prendre la moyenne des quantités

$$\frac{V - \Omega}{\Omega - d}, \quad \frac{V' - \Omega'}{\Omega' - d'}, \quad \frac{V'' - \Omega''}{\Omega'' - d''}, \quad \ldots$$

pour avoir une détermination très exacte de la valeur de n.

Dans une de ses expériences, Gauss a trouvé

$$n = 891,5.$$

Le facteur $\frac{n}{n+1}$, qui figure dans l'égalité (6 *bis*), diffère donc de l'unité de plus de 0,001. Il était bien nécessaire de tenir compte de ce facteur dans une méthode aussi précise que celle de Gauss.

L'importance de cette correction, due à la torsion des fils de cocon, s'explique par ce fait que les paquets de fils de cocon employés par Gauss, ayant à porter des aimants qui pesaient jusqu'à 25 livres, renfermaient parfois 60 fils.

Nous verrons tout à l'heure qu'au cours d'une même expérience on a à faire varier le poids supporté par les fils de cocon ; θ et, par conséquent, n dépendent de ce poids. Ainsi, dans une expérience de Gauss, n s'est trouvé égal à 497,4, le poids de l'aiguille étant de 496^{gr},2 et égal à 424,8 lorsque l'aiguille portait une charge additionnelle qui élevait son poids à 710^{gr},8. Ces variations de n sont loin d'être négligeables. Il faudra donc déterminer la valeur de n pour chacune des charges que doit, au cours des expériences, porter le fil de cocon.

Nous regardons n comme indépendant de la température et du temps ; cela n'est pas tout à fait exact. θ dépend de la température, H du temps, M de la température et du temps. Mais les variations qui en résultent pour n sont si faibles qu'elles n'altèrent pas sensiblement la valeur du facteur $\frac{n}{n+1}$.

La quantité n étant déterminée, l'équation (6 *bis*) nous donnera MH lorsque nous aurons déterminé t et K.

La détermination de t ne souffre aucune difficulté.

On détermine la durée d'un grand nombre d'oscillations. Comme, pour se mettre à l'abri des causes d'erreur provenant des courants d'air, on prend des barreaux extrêmement massifs, les oscillations sont très lentes. On se trouve amené ainsi à déterminer un

temps considérable, ce que l'on peut faire avec une erreur relative très petite.

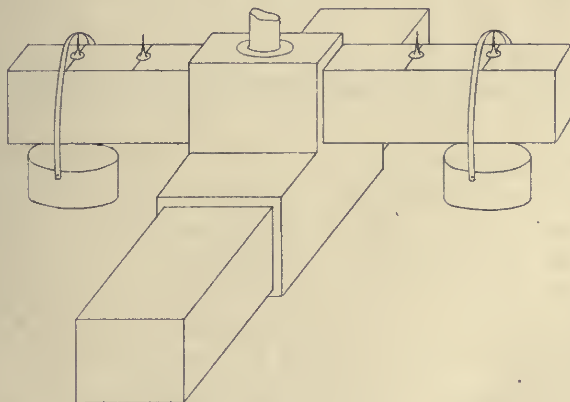
Ainsi, dans une des expériences citées par Gauss, la durée de l'observation a été de 10310,6 secondes. L'erreur commise par un observateur exercé sur la détermination d'un *intervalle* de temps ne dépasse pas certainement 0,2 secondes. La durée de l'observation est donc déterminée à 0,00002 près, et il en est de même de la durée t de l'oscillation. Si, de plus, au lieu de se contenter d'une seule observation, on déduit les résultats cherchés de la moyenne d'un grand nombre d'observations, les erreurs sur l'évaluation de la durée d'oscillation, qui sont des erreurs purement fortuites, s'atténueront encore dans une notable proportion.

Reste à déterminer K.

L'appareil étant de forme compliquée, et l'homogénéité des diverses pièces dont il se compose étant douteuse, on ne peut songer, pour déterminer K, à employer les méthodes analytiques qui servent au calcul des moments d'inertie. Gauss a donné une méthode expérimentale très ingénieuse, qui permet d'évaluer K avec toute la précision désirable.

A cet effet, l'étrier qui porte l'aimant (*fig.* 3) présente, au-dessus de l'aimant, une chape dans laquelle peut glisser une règle de bois.

Fig. 3.



Cette règle porte, à sa face supérieure, des pointes très déliées dont la distance au fil de suspension est marquée avec grand

soin. Sur ces pointes, on peut, par des anses, suspendre des poids. On place des poids sensiblement égaux à des distances sensiblement égales du fil de suspension, de manière que la règle de bois reste rigoureusement horizontale. Cherchons le nouveau moment d'inertie K_1 de l'appareil.

Soit C le moment d'inertie inconnu de la barre de bois seule; soient Q et Q′ les moments d'inertie des poids P et P′ par rapport à des axes verticaux passant par leurs centres de gravité respectifs et, par conséquent, par les petites pointes de suspension; soient r_1, r'_1 les distances de ces pointes au fil de suspension. Le nouveau moment d'inertie sera

$$K_1 = K + C + Q + Q' + P r_1^2 + P' r_1'^2.$$

Suspendons les poids à des distances r_2 et r'_2 des fils de suspension; l'appareil prendra un nouveau moment d'inertie

$$K_2 = K + C + Q + Q' + P r_2^2 + P' r_2'^2.$$

Aux trois cas que nous venons de considérer, correspondront des durées d'oscillations t, t_1, t_2, et l'on aura

$$MH = \frac{n}{n+1}\,\frac{\pi^2 K}{t^2},$$

$$MH = \frac{n'}{n'+1}\,\frac{\pi^2[K + (C + Q + Q') + P r_1^2 + P' r_2'^2]}{t_1^2},$$

$$MH = \frac{n'}{n'+1}\,\frac{\pi^2[K + (C + Q + Q') + P r_2^2 + P' r_2'^2]}{t_2^2}.$$

n' est la valeur que prend n lorsque les fils de cocon portent non seulement l'aimant, mais encore la règle de bois et les poids additionnels.

Ces trois équations, fournies par trois observations, nous donneront les trois inconnues K, $(C + Q + Q')$ et MH. Si même on ne veut connaître que MH, on pourra regarder $(K + C + Q + Q')$ comme une seule inconnue et se contenter des deux dernières équations.

Au lieu de deux ou trois observations, on en fait un grand nombre; chacune d'elles fournit une équation, et, de ce grand nombre d'équations, on déduit la valeur des inconnues par la méthode des moindres carrés. Mais, chaque observation isolée étant très longue, l'ensemble de toutes ces observations dure un temps très considérable; il est nécessaire de tenir compte des va-

riations que subit MH, soit par suite des variations que H éprouve avec le temps, soit par suite des variations très petites que peuvent produire sur M les faibles changements de température de l'observatoire. Nous allons nous proposer de corriger les observations de manière à obtenir la valeur moyenne de MH pendant la première expérience.

Pendant la seconde expérience, M est devenu M_1 et H est devenu H_1. L'équation relative à cette seconde expérience doit donc s'écrire

$$MH = \frac{n'}{n'+1}\,\frac{MH}{M_1 H_1}\,\frac{\pi^2[K+(C+Q+Q')+Pr_1^2+P'r_1'^2]}{t_1^2}.$$

Un second appareil, analogue au premier, soumis sensiblement aux mêmes variations de température que le premier, est placé à une distance suffisante du premier pour ne pas exercer sur lui d'influence notable. On le fait osciller pendant qu'on effectue sur le premier la première expérience. Soient ν la valeur de n qui convient au second magnétomètre; χ le moment d'inertie de l'appareil oscillant; m la valeur moyenne du moment magnétique de l'aimant qu'il porte pendant la durée de la première expérience; H la valeur moyenne de la composante horizontale du magnétisme terrestre pendant le même temps; τ la durée d'oscillation. On a

$$mH = \frac{\nu}{\nu+1}\,\frac{\pi^2\chi}{\tau^2}.$$

On fait encore osciller ce second magnétomètre pendant que l'on effectue sur le premier la seconde expérience; m et H ayant pris les nouvelles valeurs m_1 et H_1, τ prend la nouvelle valeur τ_1 et l'on a

$$m_1 H_1 = \frac{\nu}{\nu+1}\,\frac{\pi^2\chi}{\tau_1^2}.$$

Les deux aimants ayant été soumis sensiblement aux mêmes variations de température, on peut admettre que l'on a sensiblement

$$\frac{M}{M_1} = \frac{m}{m_1},$$

et, par conséquent,

$$\frac{MH}{M_1 H_1} = \frac{mH}{m_1 H_1} = \frac{\tau_1^2}{\tau^2}.$$

L'équation relative à la seconde expérience devra donc s'écrire

$$\mathrm{MH} = \frac{n'}{n'+1}\,\frac{\tau_1^2}{\tau^2}\,\frac{\pi^2[\mathrm{K}+(\mathrm{C}+\mathrm{Q}+\mathrm{Q}')+\mathrm{P}r_1^2+\mathrm{P}'r_1'^2]}{t_1^2}.$$

Si $\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots$ sont les durées d'oscillation du second magnétomètre aux époques où l'on effectue sur le premier la première, la deuxième, la troisième expérience, ..., la valeur moyenne de MH pendant la première de ces expériences s'obtiendra en appliquant la méthode des moindres carrés aux équations

$$\mathrm{MH} = \frac{n}{n+1}\,\frac{\pi^2\mathrm{K}}{t^2},$$

$$\mathrm{MH} = \frac{n'}{n'+1}\,\frac{\tau_1^2}{\tau^2}\,\frac{\pi^2[\mathrm{K}+(\mathrm{C}+\mathrm{Q}+\mathrm{Q}')+\mathrm{P}r_1^2+\mathrm{P}'r_1'^2]}{t_1^2},$$

$$\mathrm{MH} = \frac{n'}{n'+1}\,\frac{\tau_2^2}{\tau^2}\,\frac{\pi^2[\mathrm{K}+(\mathrm{C}+\mathrm{Q}+\mathrm{Q}')+\mathrm{P}r_2^2+\mathrm{P}'r_2'^2]}{t_2^2},$$

....

où les inconnues sont K, $(\mathrm{C}+\mathrm{Q}+\mathrm{Q}')$ et MH.

On obtiendra ainsi MH avec une extrême précision.

Pour déterminer le rapport $\frac{m_1\mathrm{H}_1}{m\mathrm{H}}$, on peut, au lieu de faire osciller le second aimant, observer l'effort qu'il faut exercer, au moyen d'une suspension bifilaire, pour le maintenir dans une position invariable. Cette disposition constitue le *magnétomètre bifilaire* de Gauss [1], que nous ne décrirons pas ici.

§ 3. — Détermination de $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}$.

Poisson [2] a indiqué la méthode qui permet de déterminer, pour un barreau aimanté, le rapport du moment magnétique à la composante horizontale du magnétisme terrestre : elle consiste à

---

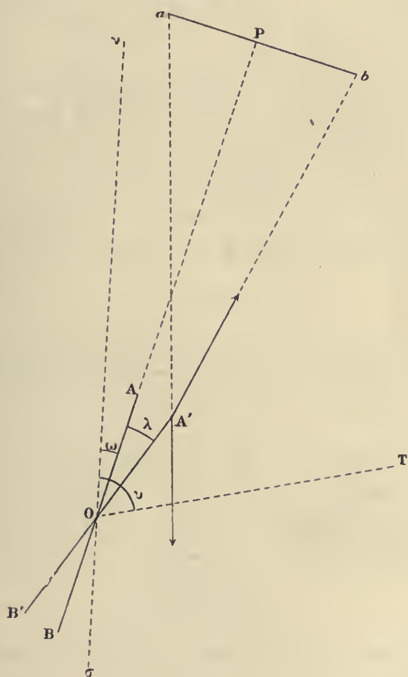
(1) GAUSS, *Ueber ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument* (GAUSS et WEBER, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*, p. 1; 1837. — GAUSS, *Werke*, V, p. 357). — GAUSS, *Zur Bestimmung der Constanten des Bifilarmagnetometers* (*ibid.*, p. 1; 1840. — GAUSS, *Werke*, t. V, p. 404).

(2) POISSON, *Second Mémoire sur la Théorie du Magnétisme* (*Mémoire de l'Académie des Sciences*, t. V, p. 520; 1824).

observer la position d'équilibre d'une aiguille, mobile dans un plan horizontal, d'abord sous l'action de la terre seule, puis sous l'action simultanée de la terre et du barreau. La méthode indiquée par Poisson supposait connue la forme de la fonction $f(r)$ qui entre dans l'expression de la loi des actions magnétiques. Gauss a modifié cette méthode de telle façon que, non seulement elle n'exige plus la connaissance de la fonction $f(r)$, mais encore qu'elle contribue à la détermination de cette fonction.

Une aiguille, dont l'axe magnétique est horizontal, est suspendue à un fil de cocon; si le fil était sans torsion, l'axe magnétique de cette aiguille se placerait suivant la méridienne magnétique OV (*fig.* 4). Grâce à la torsion du fil, si le magnétisme

Fig. 4.



terrestre n'existait pas, l'axe magnétique viendrait se placer suivant la direction OT. En réalité, sous l'action simultanée du magnétisme terrestre et de la torsion du fil, l'axe magnétique se place dans la direction BA. Soient υ l'angle νOT, ω l'angle νOA,

m le moment magnétique de l'aiguille. Nous aurons, d'après l'égalité (5),

$$m\text{H}\sin\omega = \theta(\nu - \omega).$$

Sur le prolongement de la ligne AB, à une grande distance du point O, nous plaçons un barreau aimanté de moment M, de telle façon que son axe magnétique *ab* soit horizontal et normal à BA. L'aimant AB se trouve alors dévié; il vient en A′B′; soit λ l'angle AOA′. Nous allons chercher la valeur de cet angle λ ou plutôt de la limite vers laquelle tend cet angle lorsque les deux aimants sont extrêmement éloignés. Nous savons que, pour trouver cette limite, il est permis de remplacer les deux aimants par deux éléments magnétiques ayant même direction d'axe et même moment magnétique que les deux aimants; on peut supposer que l'un de ces éléments, AB, ait son milieu en O et que l'autre, *ab*, ait son milieu P sur la direction BA.

Exprimons que l'aiguille aimantée mobile est en équilibre lorsque son axe magnétique est dirigé suivant B′A′ et que, par conséquent, les actions auxquelles elle est alors soumise ont un moment nul par rapport à l'axe de suspension.

Le magnétisme terrestre exerce une action dont le moment, par rapport à l'axe de supension, a pour valeur

$$-m\text{H}\sin(\omega + \lambda).$$

Le couple de torsion ω, par rapport au même axe, un moment

$$\theta(\nu - \omega - \lambda).$$

Le pôle a de l'élément ab renferme une quantité Q de fluide austral. Il exerce sur le pôle A de l'élément AB, qui renferme une quantité q du même fluide, une action répulsive dirigée suivant aA′ et ayant pour valeur

$$q\text{Q}\,f(\overline{a\text{A}'}).$$

Le pôle b exerce sur le même pôle A′ une action attractive, dirigée suivant A′b et qui a pour valeur

$$q\text{Q}\,f(\overline{b\text{A}'}).$$

Le point A′ diffère infiniment peu du point A. On peut regarder ces deux forces comme ayant sensiblement même grandeur et même

direction que si le point A′ était en A. On a alors

$$\overline{aA} = \overline{bA} = (r^2 + l^2)^{\frac{1}{2}},$$

$2l$ étant la longueur de l'élément ab et r la distance PA. Posons

$$\rho = (r^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les deux forces considérées auraient une résultante normale à AB, dirigée vers l'est, et ayant pour valeur

$$2q\,Q\,f(\rho)\,\frac{l}{r}.$$

Le moment de cette force par rapport à l'axe de suspension, au moment où son point d'application est venu en A′, a pour valeur

$$2q\,Q\,f(\rho)\,\frac{l}{r}\cdot\overline{OA}\cdot\cos\lambda.$$

L'action de l'élément ab sur le pôle B est, de même, une force normale à AB dirigée vers l'ouest. Si r' désigne la distance PB et si l'on pose

$$\rho' = (r'^2 + l^2)^{\frac{1}{2}},$$

cette force aura pour valeur

$$2q\,Q\,f(\rho')\,\frac{l}{r'},$$

et lorsque le point d'application de cette force viendra en B′; son moment par rapport à l'axe de suspension prendra la valeur

$$2q\,Q\,f(\rho')\,\frac{l}{r'}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\lambda.$$

Soit R la distance OP; la somme des deux moments précédents peut s'écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$q.\overline{AB}\cdot Q.2l\,\frac{f(R)}{R}\cos\lambda.$$

Mais on a

$$m = q.\overline{AB}, \qquad M = Q.2l.$$

Le moment précédent devient

$$mM\,\frac{f(R)}{R}\cos\lambda.$$

La condition d'équilibre de notre aiguille AB est la suivante :

$$m\mathrm{H}\sin(\omega+\lambda)-\theta(v-\omega-\lambda)-m\mathrm{M}\frac{f(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\cos\lambda=0.$$

On peut l'écrire

$$m\mathrm{H}\sin\omega\cos\lambda-\theta(v-\omega)+m\mathrm{H}\cos\omega\sin\lambda+\theta\lambda=m\mathrm{M}\frac{f(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\cos\lambda.$$

Mais les angles ω et λ sont très petits ; on peut remplacer $\sin\omega\cos\lambda$ par $\sin\omega$ en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, et comme

$$m\mathrm{H}\sin\omega-\theta(v-\omega)=0,$$

la condition précédente devient

$$m\mathrm{H}\cos\omega\sin\lambda+\theta\lambda=m\mathrm{M}\frac{f(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\cos\lambda.$$

$\cos\omega\sin\lambda$ peut être remplacé, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, par $\sin\lambda$; $\theta\lambda$ peut être, au même degré d'approximation, remplacé par $\theta\sin\mu$. Si l'on pose

$$\frac{m\mathrm{H}}{\theta}=\mathrm{N},$$

l'égalité précédente deviendra

$$\operatorname{tang}\lambda=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1}\frac{f(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}.$$

Telle est la formule qui donne la valeur limite de $\operatorname{tang}\lambda$ lorsque les deux aimants sont infiniment éloignés.

Supposons que la fonction $f(\mathrm{R})$ *puisse, au moins pour les valeurs de* R *supérieures à une certaine limite, se développer en une série uniformément convergente ordonnée suivant les puissances entières et négatives de* R,

$$f(\mathrm{R})=\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{R}^p}+\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{R}^{p+1}}+\ldots\tag{8}$$

L'équation précédente deviendra

$$\lim(\operatorname{tang}\lambda)_{\mathrm{R}=\infty}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{R}^{p+1}}.$$

Supposons les deux aimants situés à distance finie ; soit R la distance du centre de figure de l'aimant *ab* à l'axe de suspension.

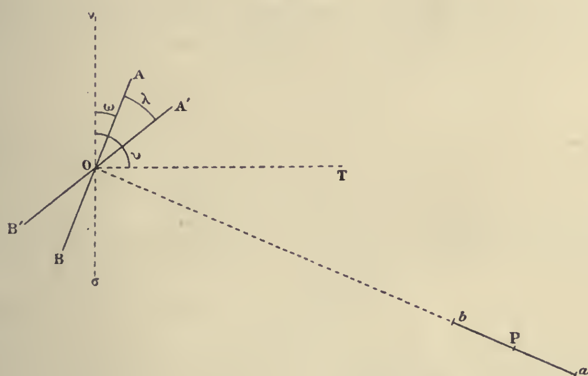
L'angle λ aura une valeur liée à R par la relation

$$(9) \qquad \operatorname{tang}\lambda = \frac{N}{N+1}\,\frac{M}{H}\,\frac{A_0}{R^{p+1}} + \frac{B}{R^{p+2}} + \frac{C}{R^{p+3}} + \dots,$$

B, C, ... étant des coefficients dont la forme importe peu.

Imaginons maintenant une seconde expérience, analogue à la précédente; l'aimant ab est encore à une grande distance du point O; son axe magnétique est toujours normal à AB, mais, de plus, l'aimant lui-même est placé sur la normale à AB (*fig.* 5).

Fig. 5.



L'aiguille sera, dans ce cas, déviée vers l'est d'un angle λ'. On verra aisément que la condition d'équilibre de l'aiguille est, dans ce cas,

$$m\mathrm{H}\sin(\omega+\lambda') = \theta(\nu-\omega-\lambda') + \mathrm{M}m\,\frac{f(\mathrm{R}-l)-f(\mathrm{R}+l)}{2l}\cos\lambda',$$

ce qui, toute simplification faite, peut s'écrire de la manière suivante

$$m\mathrm{H}\cos\omega\sin\lambda' + \theta\sin\lambda' = -\,\mathrm{M}m\,\frac{df(\mathrm{R})}{d\mathrm{R}}\cos\lambda',$$

ou encore

$$\operatorname{tang}\lambda' = -\,\frac{N}{N+1}\,\frac{df(\mathrm{R})}{d\mathrm{R}}\,\frac{M}{H}.$$

Telle est la formule qui donne la limite vers laquelle tend tangλ' lorsque l'on éloigne infiniment les deux aimants. En vertu de l'hy-

pothèse exprimée par la formule (8), on peut l'écrire

$$\lim(\operatorname{tang}\lambda')_{R=\infty} = \frac{N}{N+1}\,\frac{M}{H}\,p\,\frac{A_0}{R^{p+1}}.$$

Si l'on prend deux aimants situés à distance finie, l'angle λ' aura une valeur liée à la distance R du milieu des deux aimants par une relation de la forme

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\lambda' = \frac{N}{N+1}\,\frac{M}{H}\,p\,\frac{A_0}{R^{p+1}} + \frac{B'}{R^{p+2}} + \frac{C'}{R^{p+3}} + \dots$$

Dans une expérience où R était toujours égal ou supérieur à quatre fois la longueur de l'aimant ab, Gauss a trouvé que $\operatorname{tang}\lambda$ et $\operatorname{tang}\lambda'$ pouvaient être représentés par les deux formules

$$\operatorname{tang}\lambda = 0{,}043\,435\,\frac{1}{R^3} + 0{,}002\,449\,\frac{1}{R^5}.$$

$$\operatorname{tang}\lambda' = 0{,}086\,870\,\frac{1}{R^3} + 0{,}002\,185\,\frac{1}{R^5}.$$

La comparaison de ces résultats de l'expérience nous donne

$$\lim\left(\frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda}\right)_{R=\infty} = 2.$$

Or la comparaison des formules (9) et (10) donne

$$\lim\left(\frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda}\right)_{R=\infty} = p.$$

L'expérience de Gauss démontre donc que l'on a

$$(11)\qquad p = 2.$$

Ainsi donc, si nous voulons que $f(R)$ soit développable en série uniformément convergente, ordonnée suivant les puissances négatives de R, cette série sera forcément de la forme

$$f(R) = \frac{A_0}{R^2} + \frac{A_1}{R^3} + \frac{A_2}{R^4} + \dots;$$

en d'autres termes, *pour les distances très grandes de r, la fonction $f(r)$ varie en raison inverse du carré de la distance.*

Cette vérité, établie par Gauss d'une manière très précise, vient à l'appui de l'hypothèse à laquelle Coulomb avait été amené par ses expériences; cette hypothèse, que nous admettrons désormais,

est la suivante : *la fonction $f(r)$ est, pour toute valeur de r, proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$.*

Par définition, la fonction $f(r)$ doit prendre la valeur 1 en même temps que r; on a donc

$$f(r) = \frac{1}{r^2}. \tag{12}$$

Ce résultat obtenu, nous pouvons déterminer $\frac{M}{H}$. Les formules (9) et (10) deviennent, en effet,

$$\tang\lambda = \frac{N}{N+1}\frac{M}{H}\frac{1}{R^3} + \frac{B}{R^4} + \frac{C}{R^5} + \ldots$$

$$\tang\lambda' = \frac{2N}{N+1}\frac{M}{H}\frac{1}{R^3} + \frac{B'}{R^4} + \frac{C'}{R^5} + \ldots.$$

Or on pourra, par l'expérience, déterminer avec une grande approximation les coefficients du premier terme des séries qui représentent tangλ et tangλ'. N pouvant être déterminé par la méthode que nous avons indiquée au § 2, on pourra obtenir la valeur du rapport $\frac{M}{H}$ pour l'aimant *ab*.

Sachant, pour un même aimant, déterminer MH et $\frac{M}{H}$, on pourra connaître le moment magnétique M de l'aimant et la composante horizontale H du magnétisme terrestre.

Nous avons réduit, dans ce qui précède, l'exposé de la méthode de Gauss à ses points essentiels. Bien des détails pourraient être ajoutés.

Nous avons supposé, dans la détermination de MH, que les oscillations de l'aimant étaient infiniment petites. Ces oscillations peuvent avoir une amplitude assez grande pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte dans l'expression de leur durée; on pourra le faire par des méthodes que Gauss a indiquées [1].

Il est nécessaire de connaître la direction de l'axe magnétique de l'aimant dont on détermine le moment magnétique. Gold-

---

[1] GAUSS, *Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel* (*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*, 1837, p. 58. — GAUSS, *Werke*, Bd. V, p. 374).

schmidt (1) a montré comment, sur cet aimant, on pouvait placer un miroir dont la normale coïncidât avec l'axe magnétique de l'aimant.

Enfin, il y a lieu de tenir compte de phénomènes d'induction magnétique, pour l'étude desquels nous renverrons aux Mémoires de M. Mascart (2).

---

(1) GOLDSCHMIDT, *Auszug aus sechsjährigen täglichen Beobachtungen der magnetischen Declination zu Goettingen* (*Ibid.*, 1839, p. 102).

(2) MASCART, *Recherches sur le magnétisme* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XVIII, p. 1; 1889). — *Sur la mesure du champ magnétique terrestre* (*Ibid.*, t. XIX, p. 289; 1890).

CHAPITRE III.

LA FONCTION POTENTIELLE MAGNÉTIQUE ET LE POTENTIEL MAGNÉTIQUE.

---

§ 1. — La fonction potentielle magnétique à l'extérieur d'un aimant.

Nous avons vu [Chapitre I, égalité (5)] que, si dv est un élément de volume, de coordonnées ξ, η, ζ, intérieur à un aimant; si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont, en un point de cet élément, les composantes de l'aimantation, on donne le nom de *fonction potentielle magnétique* de cet aimant, en un point (x, y, z) qui lui est extérieur, à la fonction

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial \xi} \right\| dv.$$

La fonction $\varphi(r)$ elle-même est définie de la manière suivante [Chapitre I, égalité (4)]

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -f(r).$$

Nous avons admis que l'on avait [Chapitre II, égalité (12)]

$$f(r) = \frac{1}{r^2}.$$

Nous pouvons donc prendre

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}$$

et définir la fonction potentielle magnétique en un point (x, y, z) extérieur à un aimant par l'égalité

$$(1) \qquad \mathcal{V}(x, y, z) = \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right\| dv.$$

Il est évident qu'à l'extérieur de l'aimant cette fonction est

uniforme, finie et continue ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres par rapport aux variables x, y, z. A l'infini, elle se comporte comme une fonction potentielle électrostatique.

Si, au point (x, y, z), se trouvait une quantité de fluide magnétique austral égale à l'unité, cette masse magnétique subirait, de la part de l'aimant, une action dont les composantes X, Y, Z seraient données par les égalités [Chapitre I, égalité (6)]

$$X = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \tag{2}$$

L'expression (1) est susceptible d'une transformation très remarquable. Une intégration permet de l'écrire

$$\mathcal{V}(x, y, z) = -\mathrm{S} \left\| \mathcal{A} \cos(N_i, x) \right\| \frac{dS}{r} - \int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \frac{1}{r}\, dv, \tag{3}$$

dS étant un élément de la surface qui limite l'aimant et N_i la normale à cet élément vers l'intérieur de l'aimant.

L'égalité (3) peut s'interpréter de la manière suivante :

Imaginons un *fluide fictif*, susceptible de se distribuer en des volumes ou sur des surfaces à la manière du fluide électrique. Supposons que l'on distribue de ce fluide à l'intérieur d'un aimant, de manière qu'il ait au point (ξ, η, ζ) une densité solide

$$\rho = -\left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\|, \tag{4}$$

et que l'on distribue aussi de ce fluide à la surface de l'aimant avec une densité superficielle

$$\sigma = -\left\| \mathcal{A} \cos(N_i, x) \right\|. \tag{5}$$

D'après la formule (3), la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ sera la fonction potentielle de cette distribution fictive.

Imaginons que ce fluide fictif agisse sur les fluides magnétiques comme agissent les fluides magnétiques eux-mêmes, et le résultat exprimé par l'égalité (3) pourra s'énoncer en disant que *l'aimant exerce sur toute masse magnétique extérieure la même action que la distribution fictive définie par les égalités* (4) *et* (5).

La fonction potentielle *magnétique* de l'aimant étant identique à la fonction potentielle *ordinaire* de cette distribution fictive, on voit de suite, par les propriétés de la fonction potentielle

ordinaire, que l'on a, en tout point extérieur à l'aimant

$$\Delta \mathcal{V}(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

La fonction potentielle magnétique est harmonique en tout point extérieur à l'aimant.

§ 2. — La fonction potentielle magnétique à l'intérieur d'un aimant.

Nous venons d'indiquer quelles sont les propriétés fondamentales de la fonction potentielle magnétique d'un aimant en un point (x, y, z) extérieur à cet aimant. Considérons maintenant un point (x, y, z) intérieur à l'aimant, et voyons dans quelle mesure on peut lui étendre les propositions précédentes.

Pour les points (ξ, η, ζ) infiniment voisins du point (x, y, z), la quantité $\frac{1}{r}$ devient infinie. On peut donc se demander si l'intégrale

$$\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right\| dv$$

conserve un sens.

Entourons le point (ξ, η, ζ) d'une petite surface convexe σ. Soit

$$J = \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right\| du$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments du du volume u compris entre les surfaces σ et S. La question qu'il s'agit d'examiner est la suivante : l'intégrale J tend-elle vers une limite déterminée lorsque la surface σ se resserre autour du point (x, y, z), de manière à revenir s'évanouir en ce point par une série quelconque de formes?

La quantité $\frac{1}{r}$ étant finie pour tous les points (ξ, η, ζ) du volume u, on peut toujours, au moyen d'une intégration par parties, amener la quantité J à la forme

$$J = -\mathbf{S} \left\| \mathcal{A} \cos(N_i, x) \right\| \frac{dS}{r} - \mathbf{S} \left\| \mathcal{A} \cos(N_i, x) \right\| \frac{d\sigma}{r} - \int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \frac{1}{r} du.$$

Cette transformation faite, contractons la surface σ.

Le premier terme de J demeure invariable.

Désignons par $d\omega$ l'angle sous lequel, du point (x, y, z), on voit l'élément $d\sigma$; le second terme de J peut s'écrire

$$\mathrm{S}\left\| \mathcal{A} \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \frac{r}{\cos(\mathrm{N}_i, r)}\, d\omega,$$

l'intégration s'étendant à la sphère de rayon 1 ayant pour centre le point (x, y, z). Or, la surface σ étant convexe, la quantité $\cos(\mathrm{N}_i, r)$ est positive pour tout élément $d\omega$ et ne peut devenir nulle en aucun d'eux. Lorsque la surface σ se contracte pour venir s'évanouir au point (x, y, z), r tend vers 0. Il en est donc de même du second terme de J.

Le troisième terme de J représente la fonction potentielle ordinaire au point (x, y, z) du fluide fictif distribué en tout point du volume u avec la densité ρ donnée par l'égalité (4). D'après les propriétés de la fonction potentielle ordinaire, lorsque la surface σ vient s'évanouir au point (x, y, z), ce troisième terme tend vers une limite parfaitement déterminée qui est

$$-\int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \frac{1}{r}\, dv,$$

l'intégrale s'étendant au volume entier de l'aimant.

De là les conséquences suivantes :

1° Lorsque la surface σ vient s'évanouir au point (x, y, z) d'une manière quelconque, la quantité J tend vers une limite finie et entièrement déterminée. Il en résulte que l'intégrale

$$\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right\| dv$$

garde un sens lorsque le point (x, y, z) est intérieur à l'aimant ou se trouve à sa surface. C'est une fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ des coordonnées x, y, z de ce point, fonction à laquelle nous conserverons le nom de *fonction potentielle magnétique de l'aimant au point* (x, y, z).

2° On peut, quelle que soit dans l'espace la position du point (x, y, z), écrire l'égalité

$$(3) \quad \mathcal{V}(x, y, z) = -\mathrm{S}\left\| \mathcal{A} \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \frac{d\mathrm{S}}{r} - \int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \frac{1}{r}\, dv,$$

que nous savions déjà être exacte dans le cas où le point (x, y, z) est extérieur à l'aimant.

La fonction potentielle magnétique d'un aimant en un point quelconque est donc la somme des fonctions potentielles ordinaires au même point de deux distributions fictives : l'une a pour densité solide, en tout point intérieur à l'aimant, la quantité ρ définie par l'égalité (4); l'autre a pour densité superficielle, en tout point de la surface de l'aimant, la quantité σ définie par l'égalité (5).

Les propriétés connues de la fonction potentielle ordinaire fournissent alors autant de propriétés de la fonction potentielle magnétique. Énumérons ces propriétés :

1° Si la quantité ρ a une valeur finie en tout point intérieur à l'aimant, la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ est continue et admet des dérivées partielles du premier ordre par rapport à x, y, z, en tout point intérieur à l'aimant. Ces dérivées ont pour expression

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = -\mathrm{S} \left\| \mathcal{A} \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\mathrm{S} - \displaystyle\int \left\| \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dv, \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = -\mathrm{S} \left\| \mathcal{A} \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\mathrm{S} - \displaystyle\int \left\| \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dv, \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{d z} = -\mathrm{S} \left\| \mathcal{A} \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\mathrm{S} - \displaystyle\int \left\| \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dv. \end{cases}$$

2° Si la quantité ρ admet en tout point intérieur à l'aimant des dérivées partielles du premier ordre qui soient finies, la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}(x, y, z)$ admet, en tout point intérieur à l'aimant, des dérivées partielles du second ordre qui sont finies, et ces dérivées vérifient la condition suivante

$$(8)\qquad \Delta \mathcal{V}(x, y, z) = 4\pi \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right).$$

3° La fonction $\mathcal{V}$ varie d'une manière continue, même à la traversée de la surface S, si la densité σ est finie; mais ses dérivées partielles subissent une brusque variation au passage de cette surface; suivant une direction tangente à la surface S, la dérivée partielle du premier ordre de la fonction $\mathcal{V}$ n'éprouve aucune discontinuité à la traversée de la surface S; mais il n'en est pas de

même pour la dérivée suivant la normale à la surface S. Soient N_i, N_e les deux directions de la normale en un point à cette surface; on aura

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = 4\pi \,\|\, \mathcal{A} \cos(N_i, x) \,\|.$$

4° Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ variaient d'une manière continue d'un point à l'autre de l'aimant; il peut arriver que ces quantités soient discontinues le long d'une certaine surface; cette surface devra alors porter une distribution de fluide fictif qui aura pour densité

$$\sigma = - \,\|\, \mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) \,\| - \|\, \mathcal{A}_2 \cos(N_2, x) \,\|,$$

$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ étant les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ d'un côté de la surface de discontinuité; $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ les valeurs des mêmes quantités de l'autre côté de la surface; N_1, N_2 les deux directions de la normale à cette surface.

Aux divers points de cette surface, on aura

$$(10) \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2} = \|\, \mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) \,\| + \|\, \mathcal{A}_2 \cos(N_2, x) \,\|.$$

5° Si l'on place, en un point (x, y, z) intérieur à l'aimant, une quantité de fluide magnétique égale à l'unité, *la distribution fictive* définie par les égalités (4) et (5) *exercera sur cette masse une action parfaitement déterminée*, dont les composantes X, Y, Z seront données par les formules

$$(11) \qquad X = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}.$$

Peut-on énoncer cette proposition, ainsi qu'on serait tenté de le faire, de la manière suivante : *Un aimant exerce sur une masse magnétique égale à l'unité placée en un point intérieur* (x, y, z) *une action parfaitement déterminée, dont les composantes sont données par les formules* (11)?

Nous allons voir que cette expression : *action d'un aimant sur une masse magnétique concentrée en un point qui lui est intérieur*, ne peut avoir aucun sens si l'on admet que la loi donnée par Coulomb et Gauss pour les actions mutuelles des particules magnétiques demeure exacte, même pour les particules au contact.

L'aimant est limité par une surface S; entourons le point M(x, y, z) intérieur à cet aimant par une petite surface convexe σ. Désignons par A l'aimant donné, dont le volume est v, et par B l'aimant, de volume u, compris entre les surfaces S et σ. Soit $\mathcal{V}(x, y, z)$ la fonction potentielle au point M de l'aimant B; soient Ξ, H, Z les composantes de l'action que cet aimant B exerce sur une masse magnétique égale à l'unité placée au point M. Le point M n'appartenant pas au volume occupé par l'aimant B, on a

$$\Xi = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \qquad \mathrm{H} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \qquad \mathrm{Z} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}.$$

D'après les égalités (7), la première de ces deux égalités peut s'écrire

$$\Xi = \mathbf{S} \left\| \mathcal{A} \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\mathrm{S} + \mathbf{S} \left\| \mathcal{A} \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma + \int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} du.$$

Les quantités H et Z sont susceptibles de s'exprimer d'une manière analogue.

Supposons que l'on contracte la surface σ autour du point M de manière qu'elle vienne s'évanouir au point M. La quantité précédente varie. Si elle tendait vers une limite dont la valeur fût indépendante de la série des formes par lesquelles la surface σ a passé pour venir s'évanouir au point M, nous pourrions dire que cette limite représente la composante parallèle à Ox de l'action exercée au point M par l'aimant A. Mais nous allons voir qu'il n'en est pas ainsi.

Examinons séparément les trois termes dont se compose Ξ.

Le premier terme ne varie pas lorsque la surface σ varie.

L'existence déjà prouvée de l'intégrale

$$\int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dv$$

équivaut à ce fait que, lorsque la surface σ vient s'évanouir au point M, la quantité

$$\int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} du$$

tend vers une limite finie, indépendante de la série des formes par lesquelles a passé la surface σ.

Mais il n'en est plus de même du second terme de Ξ,

$$j = \mathbf{S} \left\| \mathcal{A} \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\sigma.$$

Nous allons démontrer que, si l'on contracte la surface σ de manière qu'elle vienne s'évanouir au point M par une série de formes homothétiques les unes des autres par rapport au point M, la quantité précédente tend vers une limite déterminée, mais que la valeur de cette limite dépend de la forme initiale de la surface σ.

Prenons, en effet, une des surfaces par lesquelles passe σ en se contractant. Pour cette surface, on a

$$j = \mathbf{S} \left\| \alpha \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\sigma + \mathbf{S} \left\| (\mathcal{A} - \alpha) \cos(\mathrm{N}_i, x) \right\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\sigma,$$

α, β, γ étant les composantes de l'aimantation au point (x, y, z).

Lorsque la surface σ se contracte, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$ tend vers une limite finie; $(\mathcal{A} - \alpha)$, $(\mathcal{B} - \beta)$, $(\mathcal{C} - \gamma)$ tendent vers 0. Le second terme de j tend donc vers 0.

D'autre part, on a

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\xi - x}{r^3} = \frac{1}{r^2} \cos(r, x).$$

Si l'on remarque alors que, pour deux surfaces σ homothétiques l'une de l'autre par rapport au point M, les quantités

$$\mathbf{S} \cos(\mathrm{N}_i, x) \cos(r, x) \frac{d\sigma}{r^2},$$

$$\mathbf{S} \cos(\mathrm{N}_i, y) \cos(r, x) \frac{d\sigma}{r^2},$$

$$\mathbf{S} \cos(\mathrm{N}_i, z) \cos(r, x) \frac{d\sigma}{r^2},$$

ont la même valeur, on verra sans peine que l'on a

$$\begin{aligned}\lim j = \;& \alpha \mathop{\mathrm{S}} \cos(\mathrm{N}_i, x)\cos(r, x)\,\frac{d\sigma}{r^2}\\ &+\beta \mathop{\mathrm{S}} \cos(\mathrm{N}_i, y)\cos(r, x)\,\frac{d\sigma}{r^2}\\ &+\gamma \mathop{\mathrm{S}} \cos(\mathrm{N}_i, z)\cos(r, x)\,\frac{d\sigma}{r^2},\end{aligned}$$

les trois sommations s'étendant à la surface σ initiale.

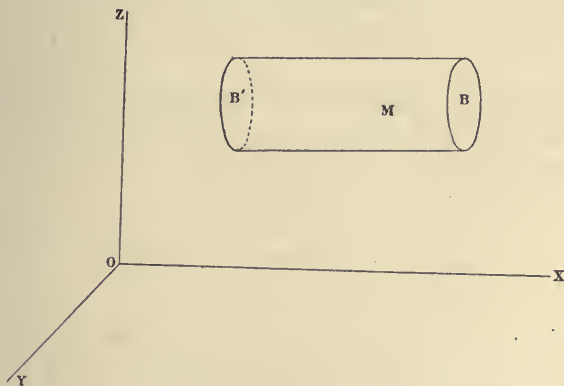
Pour prouver ce que nous avons avancé, il suffit de montrer que, pour deux formes initiales différentes de la surface σ, la quantité

$$\mathop{\mathrm{S}} \cos(\mathrm{N}_i, x)\cos(r, x)\,\frac{d\sigma}{r^2}$$

n'a pas en général la même valeur.

Supposons que la forme initiale de la surface σ soit celle d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x (*fig.* 6).

Fig. 6.



Soient B et B' les deux bases. Pour la surface latérale, on a, en tout point,

$$\cos(\mathrm{N}_i, x) = 0;$$

pour la base B, on a, en tout point, N_i étant la normale *extérieure* à la surface σ,

$$\cos(\mathrm{N}_i, x) = 1;$$

pour la base B′, on a, en tout point,

$$\cos(N_i, x) = -1.$$

Donc, pour notre cylindre, on a

$$\mathbf{S} \cos(N_i, x) \cos(r, x) \frac{d\sigma}{r^2} = \mathbf{S}_B \frac{\cos(r, x)}{r^2} d\sigma - \mathbf{S}_{B'} \frac{\cos(r, x)}{r^2} d\sigma.$$

Désignons par ω l'angle sous lequel la base B est vue du point M, et par ω′ l'angle sous lequel la base B′ est vue du même point. Il est aisé de voir que l'égalité précédente peut s'écrire

$$\mathbf{S} \cos(N_i, x) \cos(r, x) \frac{d\sigma}{r^2} = \omega + \omega'.$$

On voit bien alors que cette quantité dépend de la forme du cylindre et de la position du point M dans ce cylindre.

Ainsi l'expression : *action d'un aimant sur une masse magnétique concentrée en un point qui lui est intérieur* n'a aucun sens. C'est une proposition capitale dans l'étude du magnétisme; beaucoup d'erreurs ont été commises par les auteurs qui l'ont méconnue.

La plupart des propositions démontrées dans ce qui précède sont dues à Poisson ([1]), bien que les travaux de Poisson sur ces questions renferment quelques inexactitudes ([2]).

§ 3. — Du potentiel magnétique.

D'après ce que nous avons vu au Chapitre I, et d'après la détermination de la fonction $\varphi(r)$ obtenue au début de ce Chapitre, le potentiel des actions magnétiques mutuelles de deux aimants A, A′

([1]) Poisson (*Bulletin de la Société Philomathique*, décembre 1813). — *Mémoire sur la théorie du Magnétisme*, lu à l'Académie des Sciences, le 2 février 1824 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1821 et 1822, t. V, p. 247).

([2]) *Voir*, au sujet des inexactitudes commises par Poisson, notre *Étude historique sur l'aimantation par influence* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1887).

est susceptible de deux expressions distinctes. On peut l'écrire [Chap. I, égalité (11)]

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} = \int\int\Big(& \mathcal{A}\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x'} + \mathcal{A}\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y'} + \mathcal{A}\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z'} \\ & + \mathcal{B}\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x'} + \mathcal{B}\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial y'} + \mathcal{B}\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z'} \\ & + \mathcal{C}\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x'} + \mathcal{C}\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y'} + \mathcal{C}\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z'}\Big)\,dv\,dv'. \end{aligned}\right.$$

chacune des intégrations s'étendant à l'un des deux aimants. On peut aussi, en désignant par $\mho$ la fonction potentielle magnétique de l'aimant A, par $\mho'$ la fonction potentielle magnétique de l'aimant A', donner à $\mathfrak{P}$ l'une des deux formes équivalentes [Chap. I, égalités (10) et (10 *bis*)]

$$\mathfrak{P} = \int_A \left\| \mathcal{A}\frac{\partial\mho'}{\partial x} \right\| dv = \int_{A'} \left\| \mathcal{A}'\frac{\partial\mho}{\partial x'} \right\| dv'.$$

De ces égalités, on déduit

$$(13)\qquad 2\mathfrak{P} = \int_A \left\| \mathcal{A}\frac{\partial\mho'}{\partial x'} \right\| dv + \int_{A'} \left\| \mathcal{A}'\frac{\partial\mho}{\partial x} \right\| dv'.$$

Soit $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de l'ensemble des deux aimants; nous aurons

$$(14)\qquad \mathcal{V} = \mho + \mho'.$$

Considérons la fonction $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité

$$(15)\qquad 2\mathfrak{F} = \int_A \left\| \mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv + \int_{A'} \left\| \mathcal{A}'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x'} \right\| dv'.$$

En vertu des égalités (13) et (14), on voit que l'on peut écrire

$$2\mathfrak{F} = 2\mathfrak{P} + \int_A \left\| \mathcal{A}\frac{\partial\mho}{\partial x} \right\| dv + \int_{A'} \left\| \mathcal{A}'\frac{\partial\mho'}{\partial x'} \right\| dv'.$$

Or, si l'on déplace l'aimant A sans changer sa forme ni son aimantation, la quantité $\int_A \left\| \mathcal{A}\frac{\partial\mho}{\partial x} \right\| dv$ gardera évidemment une valeur invariable; de même, si l'on déplace l'aimant A' sans changer sa

forme ni son aimantation, la quantité $\int_{A'} \left\| \mathfrak{A}' \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial x'} \right\| dv'$ gardera une valeur invariable. Si donc on déplace l'un par rapport à l'autre les deux aimants sans changer leur forme ni leur aimantation, on aura l'égalité

$$\delta \mathfrak{F} = \delta \mathfrak{P},$$

qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'on déplace l'un par rapport à l'autre deux aimants dont on maintient constantes la forme et l'aimantation, les actions mutuelles de ces deux aimants effectuent un travail égal, au signe près, à la variation que ce déplacement fait subir à la quantité $\mathfrak{F}$, définie par l'égalité (15).

Nous donnerons désormais à cette quantité $\mathfrak{F}$ le nom de *potentiel magnétique du système des deux aimants.* Cette définition s'étend évidemment à un système formé d'un nombre quelconque d'aimants.

Soit S la surface qui limite le volume v de l'aimant A; soit N_i la normale à cette surface vers l'intérieur de l'aimant; soit S′ la surface qui limite le volume v' de l'aimant A′; soit N'_i la normale à cette surface vers l'intérieur de l'aimant. Posons

$$(4\ bis) \qquad \rho = -\left\| \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right\|, \qquad \rho' = -\left\| \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial x'} \right\|,$$

$$(5\ bis) \qquad \sigma = -\| \mathfrak{A} \cos(N_i, x) \|, \qquad \sigma' = -\| \mathfrak{A}'(N'_i, x) \|.$$

Les égalités (7) nous permettront d'écrire

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = \mathbf{S}_S \sigma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS_1 + \mathbf{S}_{S'} \sigma'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS'_1 + \int_A \rho_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dv_1 + \int_{A'} \rho'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dv'_1,$$

r désignant, dans ces diverses intégrales, les distances respectives du point (x, y, z) aux éléments dS_1, dS'_1, dv_1, dv'_1. Nous aurons, de même,

$$\frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial x'} = \mathbf{S}_S \sigma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dS_1 + \mathbf{S}_{S'} \sigma'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dS'_1 + \int_A \rho_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dv_1 + \int_{A'} \rho'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dv'_1.$$

D'ailleurs, les propriétés de la fonction potentielle ordinaire nous

permettent d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{S}_S \frac{\sigma_1}{r} dS'_1 = \mathbf{S}_S \sigma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_A \frac{\rho_1}{r} dv_1 = \int_A \rho_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dv_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En réunissant ces divers résultats, on voit que l'égalité (15) peut s'écrire

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{F} = & \int_A \left\| \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{S}_S \frac{\sigma_1}{r} dS_1 + \mathbf{S}_{S'} \frac{\sigma'_1}{r} dS'_1 + \int_A \frac{\rho_1}{r} dv_1 + \int_{A'} \frac{\rho'_1}{r} dv'_1\right)\right\| dv \\ & + \int_{A'} \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial}{\partial x'}\left(\mathbf{S}_S \frac{\sigma_1}{r} dS_1 + \mathbf{S}_{S'} \frac{\sigma'_1}{r} dS'_1 + \int_A \frac{\rho_1}{r} dv_1 + \int_{A'} \frac{\rho'_1}{r} dv'_1\right)\right\| dv'. \end{aligned}$$

Une intégration par parties permettra de remplacer cette égalité par la suivante

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F} = & \ \frac{1}{2}\int_A\int_A \frac{\rho\rho_1}{r} dv\, dv_1 + \frac{1}{2}\int_{A'}\int_{A'} \frac{\rho'\rho'_1}{r} dv' dv'_1 \\ & + \frac{1}{2}\mathbf{S}_S\mathbf{S}_S \frac{\sigma\sigma_1}{r} dS\, dS_1 + \frac{1}{2}\mathbf{S}_S\mathbf{S}_S \frac{\sigma'\sigma'_1}{r} dS' dS'_1 \\ & + \int_A\int_{A'} \frac{\rho\rho'}{r} dv'\, dv + \mathbf{S}_S\mathbf{S}_{S'} \frac{\sigma\sigma'}{r} dS' dS \\ & + \int_A \mathbf{S}_S \frac{\rho\sigma}{r} dS\, dv + \int_A \mathbf{S}_{S'} \frac{\rho\sigma'}{r} dS' dv \\ & + \int_{A'} \mathbf{S}_S \frac{\rho'\sigma}{r} dS\, dv' + \int_{A'} \mathbf{S}_{S'} \frac{\rho'\sigma'}{r} dS' dv'. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité (16) nous démontre une importante proposition qui complète celle que nous avions démontrée au § 1.

Distribuons du fluide fictif, tant à l'intérieur des deux aimants A et A' qu'à leur surface, suivant les lois indiquées par les égalités (4 bis) et (5 bis); imaginons que deux quantités q, q' de fluide fictif, séparées par une distance r, exercent l'une sur l'autre une action répulsive ayant pour valeur $\frac{qq'}{r^2}$. Le

potentiel des actions mutuelles de ces charges fictives sera précisément égal au potentiel magnétique du système.

Ainsi, il est permis de substituer à des aimants la distribution fictive définie par les égalités (4 *bis*) et (5 *bis*), non seulement lorsqu'on veut calculer les actions que ces aimants exercent sur un pôle magnétique extérieur, mais encore lorsque l'on veut calculer les actions qu'ils exercent les uns sur les autres.

L'égalité (16) donne à $\mathfrak{J}$ une forme analogue à celle d'un potentiel électrostatique. Les propriétés connues du potentiel électrostatique vont nous permettre de donner une nouvelle forme à cette expression de $\mathfrak{J}$. Remarquons que la distribution fictive dont $\mathfrak{J}$ est le potentiel a pour fonction potentielle ordinaire la fonction potentielle magnétique $\mathfrak{V}$, et nous pourrons écrire [Livre I, Chap. IX, égalité (9)] :

$$(17) \qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2\right] dv,$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace.

Cette égalité (17) nous montre que $\mathfrak{J}$ est essentiellement positif, à moins que l'on n'ait dans tout l'espace

$$\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} = 0.$$

Comme, d'ailleurs, la fonction $\mathfrak{V}$ est continue dans tout l'espace et égale à o à l'infini, ces égalités exigeraient que l'on eût, dans tout l'espace,

$$\mathfrak{V} = 0.$$

Le potentiel magnétique d'un système aimanté est positif, à moins que la fonction potentielle magnétique ne soit égale à o dans tout l'espace.

La fonction potentielle magnétique sera évidemment égale à o dans tout l'espace si le système n'est pas aimanté; mais il n'est pas nécessaire que le système ne présente aucune aimantation pour que la fonction potentielle magnétique soit égale à o dans tout l'espace. D'après l'égalité (3) et les propriétés connues de la fonction potentielle ordinaire, il est nécessaire et suffisant, pour qu'il en soit ainsi, que les composantes de l'aimantation vérifient

en tout point intérieur à chacun des aimants l'égalité

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} = 0$$

et, en tout point de la surface de chacun de ces aimants, l'égalité

$$\mathcal{A} \cos(N_i, x) + \mathcal{B} \cos(N_i, y) + \mathcal{C} \cos(N_i, z) = 0.$$

Or il est facile de trouver pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des valeurs différentes de 0 qui vérifient ces égalités; les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ qui vérifient ces égalités représentent les composantes de la vitesse en tous les points d'une masse fluide incompressible qui occuperait le volume invariable de l'aimant; une semblable masse n'est pas nécessairement au repos : il n'est donc pas nécessaire que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ soient identiquement nuls.

La formule (17) fait intervenir la quantité

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2.$$

Cette quantité se présentera fréquemment dans nos calculs. Il sera donc commode d'adopter, pour la représenter, un symbole unique. Dorénavant, nous poserons

$$\text{(18)} \qquad \text{H}\mathcal{V} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2.$$

Moyennant cette notation [1], l'égalité (17) pourra s'écrire

$$\text{(17 bis)} \qquad \mathfrak{F} = \frac{1}{8\pi} \int \text{H}\mathcal{V}\, dv.$$

En tout point extérieur aux aimants, la quantité $\text{H}\mathcal{V}$ a une signification très simple; *elle représente le carré de la valeur absolue de la force exercée par les aimants sur une quantité de fluide austral égale à l'unité placée en ce point.*

L'égalité

$$\text{H}\mathcal{V} = \lambda,$$

[1] Lamé employait, au lieu du symbole $\text{H}\mathcal{V}$, le symbole $(\Delta_1 \mathcal{V})^2$.

où λ représente une constante arbitraire, définit dans l'espace une famille de surfaces. Nous donnerons à ces surfaces, que nous aurons souvent à considérer, le nom de *surfaces isodynamiques*. Une charge magnétique, parcourant les divers points d'une surface isodynamique extérieure aux aimants, subit de la part de ces aimants une force dont la valeur absolue ne varie pas.



CHAPITRE IV.

LES DISTRIBUTIONS FICTIVES ÉQUIVALENTES A UN AIMANT.

§ 1. — Les distributions fictives équivalentes à un aimant.

Ayant un aimant, limité par une surface S, imaginons qu'à l'intérieur de cet aimant, ou bien sur la surface S elle-même, on distribue un certain fluide fictif jouissant des propriétés suivantes :

1° Une quantité q de fluide fictif, située à une distance r d'une quantité M de fluide magnétique, exerce sur ce dernier une force répulsive qui a pour valeur

$$F = \frac{Mq}{r^2}$$

et réciproquement.

2° Deux quantités q et q' de fluide fictif, situées à la distance r l'une de l'autre, exercent l'une sur l'autre une action répulsive

$$F = \frac{qq'}{r^2}.$$

Soit

$$U = \sum \frac{q}{r}$$

la fonction potentielle ordinaire de ce fluide fictif.

Supposons que nous ayons pu, à la surface de l'aimant ou à son intérieur, distribuer du fluide fictif de manière que la fonction potentielle ordinaire du fluide fictif soit, *en tout point extérieur à l'aimant,* égale à la fonction potentielle magnétique de l'aimant. Nous dirons que nous avons obtenu une *distribution fictive équivalente à l'aimant.*

La distribution définie par les égalités (4) et (5) du Chapitre

précédent nous offre un exemple de distribution fictive équivalente à l'aimant.

Cette dernière distribution fictive possède cette propriété, que sa fonction potentielle ordinaire est égale à la fonction potentielle magnétique de l'aimant, non seulement dans le champ extérieur à l'aimant, mais encore en tout point intérieur à l'aimant. Elle est d'ailleurs la seule, parmi les distributions fictives, qui possède cette dernière propriété, car il est évident que deux distributions fictives qui ont, dans tout l'espace, la même fonction potentielle ordinaire sont identiques.

Ainsi, en général, lorsqu'on aura trouvé une distribution fictive équivalente à un aimant, la fonction potentielle ordinaire de cette distribution, identique à la fonction potentielle de l'aimant en tout point situé à l'extérieur de l'aimant ou à sa surface, en différera aux points situés à l'intérieur de l'aimant.

Une distribution fictive équivalente à un aimant exerce la même action que l'aimant sur tout pôle magnétique extérieur à cet aimant.

A cette proposition, qui résulte immédiatement de la définition d'une distribution fictive équivalente à un aimant, nous ajouterons la suivante, qui est un peu plus cachée, et que nous avons déjà démontrée au Chapitre précédent pour la distribution fictive particulière que nous y avons étudiée :

Les actions mutuelles de deux aimants sont les mêmes que celles de deux distributions fictives, respectivement équivalentes à ces deux aimants.

Soient A et A' deux aimants; soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ leurs fonctions potentielles magnétiques. Le potentiel magnétique de ces deux aimants a pour valeur, d'après l'égalité (17) du Chapitre précédent,

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} = \frac{1}{8\pi}\Big(&\int_A \Pi\,\mathcal{V}\,dv + \int_A \Pi\,\mathcal{V}'dv + \int_{A'} \Pi\,\mathcal{V}\,dv' + \int_{A'} \Pi\,\mathcal{V}'dv'\\ &+ \int_{A''} \Pi\,\mathcal{V}\,dv'' + \int_{A''} \Pi\,\mathcal{V}'dv'' + 2\int_A \left\| \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\,\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x} \right\| dv\\ &+ 2\int_{A'} \left\| \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x'}\,\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x'} \right\| dv' + 2\int_{A''} \left\| \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x''}\,\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x''} \right\| dv''\Big),\end{aligned}$$

A'' étant l'espace extérieur aux deux aimants et dv'' un élément de cet espace.

D'autre part, si nous considérons deux distributions fictives respectivement équivalentes aux deux aimants A et A'; si U et U' sont leurs fonctions potentielles ordinaires, le potentiel des actions mutuelles des deux distributions fictives sera

$$\begin{aligned} Y = \frac{1}{8\pi}\Big(& \int_A \Pi\, U\, dv + \int_A \Pi\, U'\, dv + \int_{A'} \Pi\, U\, dv' + \int_{A'} \Pi\, U'\, dv' \\ & + \int_{A''} \Pi\, U\, dv'' + \int_{A''} \Pi\, U'\, dv'' + 2\int_A \left\| \frac{\partial U}{\partial x}\, \frac{\partial U'}{\partial x} \right\| dv \\ & + 2\int_{A'} \left\| \frac{\partial U}{\partial x'}\, \frac{\partial U'}{\partial x'} \right\| dv' + 2\int_{A''} \left\| \frac{\partial U}{\partial x''}\, \frac{\partial U'}{\partial x''} \right\| dv'' \Big). \end{aligned}$$

Il s'agit de prouver que, si l'on déplace les deux aimants, l'un par rapport à l'autre, sans altérer leur forme ni leur aimantation, on aura

$$\delta \mathfrak{Y} = \delta Y.$$

Or, en premier lieu, on a, dans les espaces A' et A'',

$$\mathfrak{V} = U,$$

et, dans les espaces A et A'',

$$\mathfrak{V}' = U'.$$

En second lieu, les termes

$$\int_A \Pi\, \mathfrak{V}\, dv, \qquad \int_A \Pi\, U\, dv, \qquad \int_{A'} \Pi\, \mathfrak{V}'\, dv', \qquad \int_{A'} \Pi\, U'\, dv',$$

demeurent invariables dans la modification dont il s'agit. On a donc, toute réduction faite,

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{Y} - \delta Y = \frac{1}{4\pi}\, \delta\Big[& \int_A \left\| \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial x} \right\| dv \\ & + \int_{A'} \left\| \left(\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial x'} - \frac{\partial U'}{\partial x'} \right) \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x'} \right\| dv' \Big]. \end{aligned}$$

Le théorème de Green permet de transformer la quantité entre crochets en

$$\begin{aligned} & \mathrm{S}_S\, (U - \mathfrak{V})\, \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial N_i}\, dS + \mathrm{S}_{S'}\, (U' - \mathfrak{V}')\, \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N'_i}\, dS' \\ & + \int_A (U - \mathfrak{V})\, \Delta \mathfrak{V}'\, dv + \int_{A'} (U' - \mathfrak{V}')\, \Delta \mathfrak{V}\, dv'. \end{aligned}$$

Mais, en tout point de la surface S, on a

$$U - \mathcal{V} = 0;$$

en tout point de la surface S′, on a

$$U' - \mathcal{V}' = 0;$$

tout point de l'aimant A étant extérieur à l'aimant A′, on a, en tout point de l'aimant A,

$$\Delta\mathcal{V}' = 0;$$

tout point de l'aimant A′ étant extérieur à l'aimant A, on a, en tout point de l'aimant A′,

$$\Delta\mathcal{V} = 0.$$

On a donc

$$\delta\mathcal{Y} - \delta Y = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Étant donné un aimant, on peut trouver une infinité de distributions fictives équivalentes à cet aimant. Toutes ces distributions présentent cette propriété : *La quantité totale de fluide fictif qui forme une distribution équivalente à un aimant donné est la même pour toutes les distributions équivalentes à cet aimant.*

Cette proposition peut se démontrer bien aisément de la manière suivante :

Soient un aimant limité par une surface S et une distribution équivalente à cet aimant. Cette distribution, qui renferme une quantité Q de fluide fictif, a une fonction potentielle ordinaire U.

Entourons l'aimant d'une surface fermée S′ (*fig.* 7). Soit N'_e la normale extérieure à cette surface fermée. D'après les lemmes de Gauss, on a

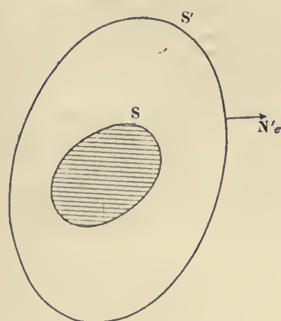
$$4\pi Q = -\mathbf{S}\frac{\partial U}{\partial N_e}\,dS'.$$

Mais, en tout point extérieur à l'aimant, la fonction potentielle ordinaire de la distribution fictive est identique à la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}$ de l'aimant. On a donc

$$4\pi Q = -\mathbf{S}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}\,dS'.$$

Cette égalité montre que, conformément à la proposition énoncée, la quantité Q est déterminée quand l'aimant est connu ; elle est la même pour toutes les distributions fictives équivalentes à un même aimant.

Fig. 7.



Pour calculer la quantité Q, nous pouvons, d'après le théorème précédent, prendre une distribution fictive quelconque équivalente à cet aimant, par exemple la distribution fictive étudiée au Chapitre précédent, qui a, en tout point intérieur à l'aimant, une densité solide

(1) $$\rho = -\left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right\|$$

et, en tout point de la surface de l'aimant, une densité superficielle

(2) $$\sigma = -\| \mathcal{A} \cos(N_i, x) \|.$$

Pour cette distribution, on aura

$$Q = \int \rho \, dv + \mathbf{S} \, \sigma \, dS = -\int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right\| dv - \mathbf{S} \, \| \mathcal{A} \cos(N_i, x) \| \, dS.$$

On peut intégrer immédiatement le premier des deux termes qui composent Q ; on le trouve égal et de signe contraire au second ; on a donc

$$Q = 0.$$

D'où la proposition suivante :

Toute distribution fictive équivalente à un aimant renferme autant de fluide fictif positif que de fluide fictif négatif.

§ 2. — La distribution superficielle équivalente à un aimant et le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet.

La distribution fictive particulière définie par les égalités (1) et (2) comporte du fluide fictif distribué à l'intérieur de l'aimant et du fluide fictif distribué à sa surface. Dans certains cas, cette dernière distribution existe seule. C'est ce qui arrive, par exemple, si l'aimantation est *uniforme*. On dit que l'aimantation d'un corps est uniforme lorsque l'intensité de l'aimantation a la même grandeur et la même direction en tous les points de l'aimant. Les trois quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ont alors des valeurs indépendantes de x, y, z, en sorte que l'on a

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} = 0$$

et, par conséquent,

$$\rho = 0.$$

Dans ce cas, la distribution superficielle équivalente à l'aimant a pour densité

$$\sigma = \| \mathcal{A} \cos(N_i, x) \|.$$

Il est aisé d'en obtenir une représentation géométrique. Donnons à la surface S qui limite l'aimant une translation infiniment petite parallèle à l'aimantation uniforme ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) de l'aimant. Soit S′ la nouvelle position de la surface S. La densité superficielle σ en un point de la surface S sera proportionnelle à la distance de ce point à la surface S′, cette distance étant comptée positivement lorsqu'au voisinage du point considéré la surface S′ est extérieure à la surface S.

D'une manière plus générale, la distribution superficielle existe seule toutes les fois que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ varient à l'intérieur de l'aimant, de telle sorte que l'on ait en tout point

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} = 0.$$

Un tel aimant est ce que Sir W. Thomson (¹) nomme un *aimant*

(¹) *Voir* Chapitre VII, § 1.

solénoïdal; lorsque nous étudierons, au Livre VIII, la théorie, donnée par Poisson, de l'aimantation par influence, nous verrons combien est importante l'étude des aimants solénoïdaux.

Dans le cas où l'aimant est solénoïdal, son action extérieure est la même que celle d'une distribution fictive purement superficielle, dont la densité est donnée par l'égalité (2).

Dans tous les cas possibles, on peut trouver d'une et d'une seule manière une distribution fictive, entièrement répandue sur la surface d'un aimant et équivalente à cet aimant. Seulement, dans le cas où l'aimant n'est pas solénoïdal, la densité superficielle de cette couche fictive n'a plus la valeur donnée par l'égalité (2).

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement des principes posés au Livre III, Chapitre V, §§ 1, 2 et 3. Nous avons vu, en effet, que l'on pouvait, d'une et d'une seule manière, distribuer une quantité donnée de fluide (elle est ici égale à 0) sur une surface S, de telle manière que la fonction potentielle de ce fluide soit identique, à l'extérieur de la surface S, à une fonction harmonique donnée, qui est ici la fonction potentielle magnétique $\mathfrak{V}$ de l'aimant.

Un aimant étant donné, comment déterminera-t-on cette distribution superficielle qui lui est équivalente? La réponse à cette question dépend de la manière dont l'aimant est donné.

Si l'on se donne l'aimantation en chaque point de l'aimant, on pourra calculer la valeur de la fonction potentielle magnétique en tout point de l'espace extérieur à l'aimant ou de sa surface; il suffira alors de résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à l'aimant, et l'on connaîtra la distribution superficielle qui lui est équivalente, conformément aux principes qui ont été exposés au Livre III, Chapitre V.

On opérera encore de même si, au lieu de se donner l'aimantation en chaque point de l'aimant, on se donne directement la fonction potentielle magnétique dans tout l'espace extérieur à cet aimant.

Si l'on se donne seulement la valeur de la fonction potentielle magnétique aux divers points de la surface de l'aimant, on aura, pour déterminer la distribution superficielle qui lui est équivalente, à résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à l'aimant et pour l'espace intérieur à l'aimant.

Ce n'est sous aucune de ces formes que se pose le problème à un physicien auquel on donne un aimant réel et auquel on demande de déterminer la distribution superficielle équivalente à cet aimant.

Ce physicien n'a aucun moyen de déterminer la grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point intérieur à l'aimant; il n'a, non plus, aucun moyen de déterminer la valeur de la fonction potentielle magnétique aux divers points du champ magnétique ou de la surface de l'aimant. Tout ce qu'il peut déterminer, par des méthodes que nous étudierons au paragraphe suivant, ce sont les composantes X, Y, Z de l'action que l'aimant exercerait sur un pôle magnétique égal à l'unité placé en un point (x, y, z) extérieur à l'aimant et pas trop éloigné de l'aimant.

On sait que ces composantes sont liées à la fonction potentielle magnétique par les relations

$$X = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}.$$

On voit donc que l'expérience permet seulement de déterminer les dérivées partielles de la fonction potentielle magnétique aux divers points du champ.

Dès lors, voici sous quelle forme se présentera, pour le physicien, le problème qui consiste à déterminer la distribution magnétique superficielle équivalente à un aimant.

Ayant déterminé par l'expérience la valeur que prend, aux divers points extérieurs à l'aimant et infiniment voisins de sa surface S, *la dérivée* $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$ *de la fonction potentielle magnétique suivant la normale extérieure à l'aimant, trouver la distribution superficielle fictive qui équivaut à cet aimant.*

Soit U la fonction potentielle de la distribution fictive cherchée. Considérons l'espace extérieur à l'aimant. Dans cet espace, la fonction U est harmonique; à l'infini, elle se comporte comme une fonction potentielle; sur la surface S, $\frac{\partial U}{\partial N_e}$ prend des valeurs données $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$.

Nous savons (Livre II, Chap. V, § 3) qu'il existe une seule fonction U satisfaisant à ces conditions. Déterminer cette fonction, c'est résoudre, pour l'espace extérieur à la surface S, le problème

auquel nous avons donné le nom de *problème dérivé de Lejeune-Dirichlet.*

Ce problème résolu, nous connaîtrons les valeurs u que prend U sur la surface S. Envisageons l'espace intérieur à la surface S. La fonction U est harmonique dans cet espace et elle prend, sur la surface S, des valeurs données u. Il n'existe qu'une fonction U qui satisfasse à ces conditions; elle s'obtiendra en résolvant, pour l'espace intérieur à la surface S, le problème de Lejeune-Dirichlet.

La fonction U étant alors connue dans tout l'espace, la densité σ du fluide fictif en un point quelconque de la surface S s'obtiendra par la formule

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial U}{\partial N_e} + \dfrac{\partial U}{\partial N_i}\right) \\ \quad = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} + \dfrac{\partial U}{\partial N_i}\right). \end{cases}$$

Ainsi, *la détermination de la distribution superficielle équivalente à un aimant physiquement donné exige que l'on résolve d'abord le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet pour l'espace extérieur à l'aimant donné, puis le problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace intérieur à cet aimant.*

Quelques remarques au sujet de la solution précédente :

1° Cette solution comporte une vérification. Une fois la densité σ déterminée comme nous venons de l'indiquer, on devra s'assurer que la distribution fictive trouvée renferme autant de fluide positif que de fluide négatif, c'est-à-dire que l'on a

$$\int \sigma \, dS = 0.$$

On aura ainsi un moyen de vérifier si les données expérimentales qui ont servi de point de départ aux opérations analytiques étaient satisfaisantes.

2° Dans un grand nombre de questions, par exemple, dans tous les cas où l'aimant devant être maintenu immobile, on veut seulement pouvoir calculer son action sur un aimant mobile extérieur : il suffit de connaître la fonction $\mathcal{V}$, ou, ce qui revient au même, la fonction U, pour l'espace extérieur à l'aimant. Il suffit, dans ce cas, de résoudre le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet pour

l'espace extérieur à l'aimant; il est inutile de résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace intérieur à l'aimant.

3° Pendant très longtemps, les physiciens, et notamment Jamin, ont eu à l'égard de la détermination de la couche fictive équivalente à un aimant les idées les plus erronées. Ils prenaient simplement, pour expression de la densité de cette couche fictive,

$$\sigma' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}.$$

Cette expression ne pourrait être exacte, comme on le voit en la comparant à l'égalité (3), que si l'on avait, en tout point de la surface de l'aimant,

$$(4) \qquad \frac{\partial U}{\partial N_i} = 0.$$

La fonction U serait alors harmonique à l'intérieur de la surface S et vérifierait l'égalité (4) en tous les points de la surface S. D'après ce que nous avons vu (Livre II, Chap. V, § 3), toutes les fonctions U qui satisfont à ces conditions à l'intérieur de la surface S ne diffèrent les unes des autres, à l'intérieur de cette surface, que par une constante. Comme d'ailleurs la fonction U = 0 satisfait à ces conditions, on voit que toute fonction qui satisfait à ces conditions est constante à l'intérieur de la surface S et sur la surface S elle-même. La couche fictive serait en équilibre d'elle-même sur la surface S.

La couche fictive renferme autant de fluide fictif positif que de fluide fictif négatif; nous savons qu'une semblable couche ne pourrait être en équilibre d'elle-même sur la surface S sans que sa densité fût égale à 0 en tout point de cette surface. Ainsi l'hypothèse admise par Jamin pour la détermination de la couche fictive équivalente à un aimant ne serait exacte que si la densité de la couche fictive était, en tout point, égale à 0, cas auquel l'aimant n'aurait aucune action sur les points extérieurs.

§ 3. — Méthodes expérimentales pour l'étude de la distribution fictive.

Nous avons vu que, pour qu'il soit possible de déterminer analytiquement la distribution superficielle fictive qui équivaut à un aimant, il était nécessaire, tout d'abord, de déterminer expéri-

mentalement la valeur de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$ aux divers points de l'aimant. Les méthodes qui servent à cette détermination peuvent se classer en deux types :

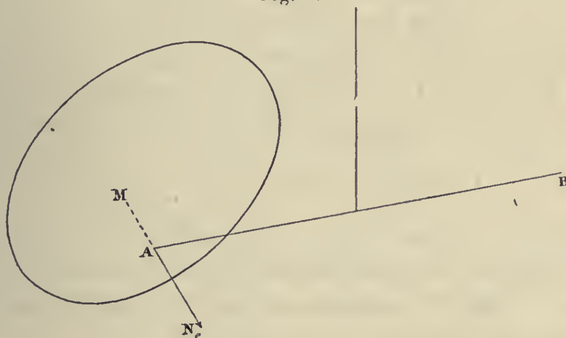
1° La méthode de Coulomb ;

2° La méthode de Van Rees.

Une autre méthode, dite *méthode de l'arrachement*, a été proposée par Jamin [1], et employée par ce physicien et par M. Duter. Nous verrons plus loin (Livre IX, Chap. IX, § 4) que cette méthode ne peut servir à déterminer $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$.

1° *Méthode de Coulomb* [2]. — Supposons qu'une aiguille aimantée, fine et très longue, soit suspendue au fil de cocon de la balance de torsion. Elle est en équilibre sous l'action de la terre dans une certaine position horizontale AB (*fig.* 8). La torsion du fil a une valeur inconnue.

Fig. 8.



On approche l'aimant pour lequel on veut déterminer la valeur de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$ en un certain point M. On l'approche de telle manière que le point M soit dans le plan horizontal qui passe par AB, qu'il soit extrêmement voisin de l'extrémité A de l'aiguille, et que la ligne MA soit normale à la fois à l'aimant et à la direction AB.

---

[1] JAMIN, *Sur la distribution magnétique* (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1572; 1872).

[2] COULOMB, *Septième Mémoire sur l'électricité et le magnétisme : Du magnétisme* (*Mémoires de l'Académie* pour 1789).

L'orientation de l'aiguille est alors modifiée; par un contrepoids et par une torsion convenable du fil de suspension, on ramène l'aiguille à sa position primitive.

Soit $\mathfrak{M}$ le moment magnétique que possédait l'aiguille AB avant l'approche de l'aimant. Soit δ l'angle que la direction BA fait avec le méridien magnétique vers l'est. Soit ω l'angle de torsion du fil lorsque l'aiguille est en équilibre d'elle-même en AB; ω est compté positivement dans le même sens que δ. Au moment où l'aiguille est en équilibre, on a

$$\mathfrak{M} H \sin\delta + \theta\omega = 0,$$

θ étant le coefficient d'élasticité de torsion du fil.

L'aimant étant placé, l'aiguille ramenée en AB, soit μ la masse magnétique concentrée au pôle A de l'aiguille. Supposons que l'aimant exerce sur une masse magnétique égale à l'unité une force F, dont la composante suivant MA ou N_e soit F_N. Supposons, en outre, l'aimant placé de telle manière qu'il tende à dévier l'aiguille BA vers l'est. Soit α l'angle (il sera négatif) dont on a dû augmenter la torsion pour ramener l'aiguille en AB. Soit $2l$ la longueur de l'aiguille AB. La nouvelle condition d'équilibre de l'aiguille sera, *en négligeant l'action de l'aimant sur le pôle* B,

$$2\mu l H \sin\delta + F_N \mu l + \theta(\omega + \alpha) = 0.$$

La distribution magnétique sur l'aiguille placée en présence de l'aimant n'est pas forcément la même que sur l'aiguille soumise seulement à l'action terrestre. Le moment magnétique $\mathfrak{M}$ n'est pas forcément égal au moment magnétique $2\mu l$.

Nous admettrons que les variations subies par l'aimantation de l'aiguille lorsqu'on l'approche de l'aimant à étudier sont négligeables. Nous aurons alors

$$\mathfrak{M} = 2\mu l,$$

et nos deux équations d'équilibre nous donneront

$$F_N + \frac{2\theta}{\mathfrak{M}}\alpha = 0.$$

Nous obtiendrons ainsi la composante, suivant la normale à la surface de l'aimant, de l'action que l'aimant exerce sur une masse

magnétique égale à l'unité placée au point A; mais, dans la définition de cette action, il ne faut pas oublier que la distribution sur l'aimant est celle qui se produit en présence de l'aiguille AB. *Nous admettrons que l'approche de l'aiguille* AB *ne modifie pas sensiblement la distribution magnétique sur l'aimant étudié.* Moyennant cette nouvelle approximation, la force F_N sera bien celle qui est produite par la distribution magnétique que l'on veut étudier sur un pôle d'aimant égal à l'unité infiniment voisin de la surface de l'aimant. On aura donc bien

$$F_N = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e},$$

$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$ ayant la même signification que dans les raisonnements qui précèdent.

Ainsi, moyennant des approximations dont il est assez difficile d'apprécier le degré d'exactitude, la méthode de Coulomb fournit les données expérimentales qu'il est nécessaire de connaître pour étudier la distribution fictive du magnétisme.

Coulomb a aussi employé, pour mesurer la force F_N, au lieu de la balance de torsion, une méthode fondée sur la durée des oscillations d'une petite aiguille en présence de l'aimant. La méthode peut être justifiée à peu près par les mêmes considérations que la précédente; elle est soumise aux mêmes approximations.

2° *Méthode de Van Rees, modifiée par MM. Mascart et Joubert.* — Van Rees a eu le premier l'idée d'avoir recours aux phénomènes d'induction électromagnétique pour étudier la distribution du magnétisme. Il a employé cette méthode, comme nous le verrons au Chapitre suivant, dans l'examen des aimants linéaires. MM. Mascart et Joubert [1] ont montré comment on pouvait modifier cette méthode, de manière à en faire usage pour l'étude de la distribution magnétique sur des aimants quelconques.

Prenons un très petit circuit fermé, plan, d'aire Ω. Déplaçons-le dans le champ magnétique d'un aimant. Soit N la normale à la face positive de ce petit circuit. A l'instant t, ce déplacement engendre dans le petit circuit une force électromotrice intégrale

---

[1] MASCART et JOUBERT, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, t. II, p. 728; Paris, 1886.

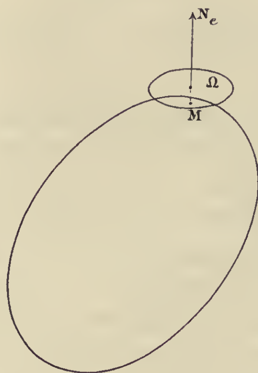
d'induction $\mathcal{E}$, qui a pour valeur (¹) [Livre XV, Chap. III, égalité (7)],

$$\mathcal{E} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \frac{d}{dt} \mathrm{S} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathrm{N}} d\Omega = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \Omega \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathrm{N}},$$

expression qui est exacte, soit que l'aimantation de l'aimant ait varié pendant ce déplacement, soit qu'elle n'ait pas varié.

Cela étant, relions par un double fil le petit circuit à un galvanomètre balistique (Livre XIII, Chap. VII) placé très loin de l'aimant. Plaçons initialement (*fig.* 9) ce petit circuit très près

Fig. 9.



de l'aimant, de manière que son plan soit parallèle au plan tangent en M à la surface de l'aimant et que la normale N à sa face positive coïncide avec la normale N_e. Le fil n'est parcouru par aucun courant; l'aimant est donc dans son état naturel; la valeur initiale $\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathrm{N}}\right)_0$ de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathrm{N}}$ est donc bien la quantité $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathrm{N}_e}$ que nous voulons déterminer.

Enlevons rapidement le petit circuit pour ne l'arrêter qu'à une distance extrêmement grande de l'aimant; la valeur finale $\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathrm{N}}\right)_1$ de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathrm{N}}$ est extrêmement petite.

Le petit circuit est à l'état neutre au début de l'expérience et à la fin. Soit E la force électromotrice dont ce circuit serait le siège à l'instant t, si le courant qui le traverse était uniforme. Soit R

(¹) $\mathfrak{H}$ est la constante fondamentale des actions électromagnétiques.

la résistance totale du système dont il fait partie. Il résulte des considérations qui seront exposées au Livre XIV, Chapitre VII, que la quantité totale Q d'électricité mise en mouvement dans notre petit circuit peut se calculer par la formule

$$Q = \frac{1}{R}\int E\,dt.$$

Mais on a

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{E}',$$

$\mathcal{E}'$ étant la force électromotrice intégrale que le circuit induirait sur lui-même à l'instant t, si le courant qui le traverse était à tout instant uniforme.

Le circuit étant indéformable, le courant qui le traverse étant égal à o, au départ comme à l'arrivée, on a

$$\int \mathcal{E}'\,dt = 0.$$

Il reste donc

$$Q = \frac{1}{R}\int \mathcal{E}\,dt = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{\Omega}{R}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N}\right)_0 - \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N}\right)_1\right],$$

ou, d'après ce qui précède,

$$Q = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{\Omega}{R}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e}.$$

Le galvanomètre balistique permettant de connaître Q, nous pourrons connaître $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e}$ par une méthode qui n'est plus soumise aux approximations incertaines de la méthode de Coulomb.



CHAPITRE V.

LE PROBLÈME DÉRIVÉ DE LEJEUNE-DIRICHLET.

§ 1. — Le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet pour les cylindres.

Nous avons vu que la détermination, d'après les données expérimentales, de la distribution magnétique fictive équivalente à un aimant plein conduisait à résoudre, pour l'espace extérieur à cet aimant, le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet. Ce problème s'énonce de la manière suivante :

Soit S *la surface de l'aimant; soit* N_e *la normale extérieure à cette surface; on demande de trouver une fonction* $\mathcal{V}$, *harmonique dans tout l'espace extérieur à la surface* S, *se comportant à l'infini comme une fonction potentielle et telle que* $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$ *prenne sur la surface* S *des valeurs données finies, variables d'une manière continue.*

Il serait désirable que l'on eût, pour résoudre ce problème, des méthodes aussi puissantes que celles qui ont été créées pour résoudre le problème même de Dirichlet. Malheureusement, il s'en faut bien qu'il en soit ainsi, et l'on ne sait résoudre le problème en question que dans quelques cas assez particuliers.

Supposons, en premier lieu, que l'aimant ait la forme d'un cylindre pratiquement très long et théoriquement illimité, dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z, et admettons que l'aimantation de cet aimant soit la même en tout point d'une ligne quelconque parallèle à l'axe des z. La fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}$ sera alors indépendante de z.

Soit L le contour de la section du cylindre par le plan XOY.

Soit N_e la normale à la courbe L vers l'extérieur de l'aire limitée par cette courbe. Le problème proposé se réduira alors à celui-ci :

Trouver une fonction $\mathcal{V}$ *des deux variables* x *et* y, *harmonique en tout point de l'aire plane illimitée extérieure à la courbe* L, *se comportant à l'infini comme une fonction potentielle et telle que* $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$ *prenne, en tout point de la courbe* L, *des valeurs données, finies, variables d'une manière continue.*

Ce problème n'est autre chose que le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet, réduit au cas de deux variables.

Or, *dans ce cas, si l'on sait résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet pour l'aire illimitée extérieure à la courbe* L, *on sait, pour la même aire, résoudre le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet.*

Commençons par déterminer une fonction $v(x, y)$, harmonique en tout point de l'aire illimitée extérieure à la courbe L, se comportant à l'infini comme une fonction potentielle, et prenant en tout point de la courbe L une valeur constante et positive donnée a. On sait faire cette opération puisque, par hypothèse, l'on sait résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet pour la région extérieure à la courbe L.

Considérons les deux familles de courbes

$$v = \text{const.},$$
$$u = \text{const.},$$

les courbes de la seconde famillle étant les trajectoires orthogonales des courbes de la première famille. Ces deux familles de courbes forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales. Dans ce système, l'élément linéaire est représenté par l'expression

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2,$$

A et B étant deux fonctions positives de u et de v. D'après ce qui a été démontré ailleurs (Livre V, Chap. V, § 2), le système de coordonnées orthogonales dont il s'agit forme un système isotherme, en sorte que l'on a

$$A = F(u, v) f(u),$$
$$B = F(u, v) g(v),$$

$F(u, v)$, $f(u)$, $g(v)$ étant trois fonctions positives.

D'après les principes exposés ailleurs (Livre II, Chap. VII, § 1), l'équation

$$\frac{\partial^2 \mho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mho}{\partial y^2} = 0$$

deviendra, dans le nouveau système de coordonnées,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial \mho}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial \mho}{\partial v}\right) = 0$$

ou bien

$$\frac{1}{g(v)}\frac{\partial}{\partial u}\left[f(u)\frac{\partial \mho}{\partial u}\right] + \frac{1}{f(u)}\frac{\partial}{\partial v}\left[g(v)\frac{\partial \mho}{\partial v}\right] = 0.$$

Prenons deux nouvelles variables α, β, liées respectivement à u et v par les relations

$$\alpha = \int_0^u f(u)\,du,$$

$$\beta = \int_0^v g(v)\,dv.$$

La fonction $F(u, v)$ deviendra $\Phi(\alpha, \beta)$. Le carré de l'élément linéaire aura pour nouvelle expression

(1) $$ds^2 = \Phi^2(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

L'équation qui exprime que la fonction $\mho$ est harmonique deviendra simplement

(2) $$\frac{\partial^2 \mho}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \mho}{\partial \beta^2} = 0.$$

D'ailleurs les deux familles de lignes coordonnées

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.}$$

coïncideront respectivement avec les familles de lignes

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}$$

Si l'on pose

$$K = \int_0^a f(u)\,du,$$

la ligne L sera représentée par l'équation

$$\alpha = K.$$

Ces préliminaires posés, nous remarquerons en premier lieu que,

si la fonction φ vérifie l'équation (2), la fonction $\upsilon(x, y)$ définie par

$$\upsilon = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$$

vérifiera aussi cette même équation. Cette fonction est donc harmonique dans la région extérieure à la courbe L.

Nous remarquerons en second lieu qu'on a, en tout point de la courbe L,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N_e} = \frac{1}{\Phi(K, \beta)} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$$

ou bien

$$\upsilon = \Phi(K, \beta) \frac{\partial\varphi}{\partial N_e}.$$

La fonction υ prend donc, en tout point de la courbe L, des valeurs qui peuvent être regardées comme données.

La fonction υ sera alors déterminée en résolvant le problème de Lejeune-Dirichlet pour la région extérieure à la ligne L.

Une fois la fonction υ connue, on obtiendra la valeur de la fonction φ en un point de coordonnées α, β, par la formule

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha \upsilon(\alpha, \beta)\, d\alpha,$$

en sorte qu'une quadrature achèvera la solution du problème.

§ 2. — Le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet pour la sphère.

Dans le cas où deux variables seulement figurent dans la question, le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet se ramène, comme nous venons de le voir, au problème de Lejeune-Dirichlet. Cette réduction repose essentiellement sur la possibilité de faire figurer le contour de l'aire étudiée au nombre des lignes qui composent un système divisant le plan en carrés infiniment petits.

Une réduction analogue s'opérerait dans l'espace si la surface de l'aimant pouvait faire partie d'un système triplement orthogonal divisant l'espace en cubes infiniment petits.

Dans quel cas la surface de l'aimant possédera-t-elle une semblable propriété ?

Le système classique des coordonnées rectangulaires forme un système divisant l'espace en cubes infiniment petits; ce système correspond au cas où l'aimant a la forme d'*une plaque théoriquement illimitée, comprise entre deux plans parallèles.*

Dans ce cas, si l'on suppose que l'une des faces de la plaque soit formée par le plan XOY, l'aimant étant situé au-dessous de ce plan, on commencera par déterminer une fonction $\mho(x, y, z)$, harmonique dans tout l'espace situé au-dessus du plan XOY, se comportant à l'infini comme une fonction potentielle, et prenant aux divers points du plan XOY des valeurs égales aux valeurs de $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ données par l'expérience. Cela fait, la fonction φ sera déterminée en tout point de l'espace considéré par la formule

$$\varphi = -\int_z^\infty \mho \, dz.$$

Peut-on trouver un autre système triplement orthogonal divisant l'espace en cubes infiniment petits ? Si l'on remarque qu'un semblable système constituerait une représentation conforme du premier et si l'on se souvient du théorème démontré par Liouville (Livre II, Chap. VIII, § 3), on voit qu'un semblable système doit se déduire du précédent par inversion. Un plan se transformant en sphère par inversion, nous arrivons à cette conclusion que la méthode par laquelle, dans le cas de deux variables, on ramène le problème dérivé de Dirichlet au problème de Dirichlet, est applicable à l'espace extérieur à une sphère, mais non à une autre forme d'espace illimité. Comme on sait résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à une sphère, on saura aussi résoudre le problème dérivé de Lejeune-Dirichlet pour cet espace. Voici la manière la plus simple et la plus pratique de résoudre effectivement ce problème :

Marquons la situation d'un point à l'extérieur de la sphère par sa distance r au centre de la sphère, sa longitude occidentale ψ et sa colatitude septentrionale θ.

La fonction φ, étant harmonique dans l'espace extérieur à la sphère, est développable (Livre II, Chap. VI, § 3) en série uniformément convergente ordonnée suivant les puissances croissantes

de $\frac{1}{r}$. Comme, d'ailleurs, cette fonction est la fonction potentielle d'une masse totale égale à o de fluide fictif, le développement commencera par un terme en $\frac{1}{r^2}$. On aura donc

$$\mathcal{V} = \frac{1}{r^2} Y_1(\theta, \psi) + \frac{1}{r^3} Y_2(\theta, \psi) + \ldots + \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \psi) + \ldots,$$

$Y_n(\theta, \psi)$ étant une fonction de Laplace qui dépend de $(2n+1)$ coefficients. Ce sont ces coefficients qu'il nous faut déterminer.

Or, de l'égalité précédente, on déduit

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\left[\frac{2}{r^2} Y_1(\theta, \psi) + \frac{3}{r^3} Y_2(\theta, \psi) + \ldots + \frac{n+1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \psi) + \ldots\right].$$

D'autre part, à la surface de la sphère, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r}$ prend les valeurs données $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$. Si donc on désigne par R le rayon de la sphère, on devra avoir, en tout point de la sphère,

$$-R\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = \frac{2}{R^2} Y_1(\theta, \psi) + \frac{3}{R^3} Y_2(\theta, \psi) + \ldots + \frac{n+1}{R^{n+1}} Y_n(\theta, \psi) + \ldots,$$

égalité qui permettra facilement, d'après les propriétés des fonctions Y_n, de déterminer les coefficients de ces fonctions, et, par conséquent, de déterminer $\mathcal{V}$.

C'est par cette méthode que Gauss (¹) a pu donner le développement en série qui représente la fonction potentielle magnétique du globe terrestre en tout point extérieur à la Terre ou situé à sa surface, en prenant pour point de départ la détermination, en chaque point de la surface du globe, de la composante verticale du magnétisme terrestre.

Ce développement a un grand intérêt. En effet, si l'on désigne en un point du globe par X la composante horizontale du magnétisme terrestre dirigée vers le nord géographique, par Y la composante horizontale dirigée vers l'est, par Z la composante verticale

---

(¹) Gauss, *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus* (Gauss et Weber, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre* 1838. Leipzig, 1839. — Gauss, *Werke*, Bd. V, p. 119).

dirigée vers le zénith, on aura évidemment

$$(3)\quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{R}\,\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta}, \\[2ex] Y = \dfrac{1}{R\sin\theta}\,\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\psi}, \\[2ex] Z = -\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial r}. \end{cases}$$

Une fois que l'on a obtenu, par la méthode de Gauss, le développement de $\mathcal{V}$ pour tout point extérieur à la Terre ou situé à sa surface, les égalités (3) permettent de calculer les éléments du magnétisme terrestre en tous les points de la surface du globe.

Deux remarques au sujet de la détermination de la fonction potentielle magnétique de la Terre :

1° La méthode que nous venons d'indiquer suppose que l'on ait déterminé expérimentalement, en tout point de la surface du globe, la valeur de Z ou de $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial r}$. Or on ne pourra, en réalité, effectuer cette détermination qu'en un nombre limité de stations. Aussi serait-il impossible de déterminer tous les coefficients qui figurent dans le développement de $\mathcal{V}$ en série illimitée. On se contentera donc de représenter approximativement $\mathcal{V}$ par la suite limitée

$$\mathcal{V} = \frac{1}{r^2}Y_1(\theta,\psi) + \frac{1}{r^3}Y_2(\theta,\psi) + \ldots + \frac{1}{r^{n+1}}Y_n(\theta,\psi)$$

qui dépend de

$$3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2 - 1$$

coefficients inconnus; $[(n+1)^2 - 1]$ déterminations suffiront à en faire connaître la valeur.

2° L'expérience ne détermine pas directement la valeur de la composante verticale Z du magnétisme terrestre, mais les valeurs de la composante horizontale H et de l'inclinaison i. De ces valeurs, on déduit la valeur de Z par la formule

$$Z = -\operatorname{tang} i.$$

La méthode de Gauss donne H avec une grande précision ; mais

les boussoles d'inclinaison étant les moins parfaits des instruments magnétiques, Gauss s'est préoccupé de trouver une méthode précise pour déterminer l'inclinaison magnétique. Il y est parvenu en employant les propriétés des courants induits par la terre, ainsi que nous le verrons au Livre XV, Chap. III, § 2.

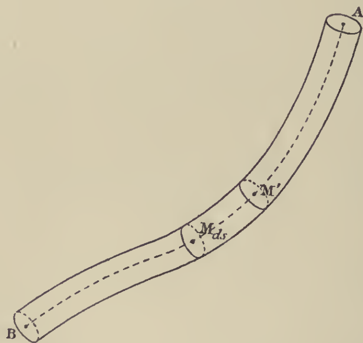
CHAPITRE VI.

LES AIMANTS LINÉAIRES.

Nous allons étudier d'une manière spéciale, dans ce Chapitre, les aimants dont deux dimensions sont extrêmement petites par rapport à la troisième. Nous donnerons à ces aimants le nom d'*aimants linéaires*.

Considérons un aimant dont tous les points diffèrent très peu d'une ligne s ou BA (*fig.* 10). Sur cette ligne, considérons deux

Fig. 10.



points M, M', infiniment voisins, dont ds est la distance. Par ces points M et M' menons des sections droites dans l'aimant. Soit ω l'aire d'une de ces sections droites. L'élément MM' aura pour volume $\omega\, ds$. Si $\mathfrak{M}$ est l'intensité d'aimantation en un point de cet élément, son moment magnétique aura pour valeur $\mathfrak{M}\omega\, ds$. Nous poserons

$$\mu = \mathfrak{M}\omega.$$

Considérons un point (x, y, z) situé à une distance r de l'élé-

ment MM'. La fonction potentielle magnétique de l'élément MM' en ce point (x, y, z) aura pour valeur [Chapitre I, égalité (1)]

$$P = \mu ds \frac{\cos(r, l)}{r^2},$$

l étant la direction de l'aimantation de l'élément MM'.

Nous admettrons que *l'aimant linéaire étudié est aimanté longitudinalement*, c'est-à-dire que la direction l de l'aimantation coïncide en chaque point M avec la direction de la tangente à la ligne s. Nous aurons alors

$$\cos(r, l) = -\frac{\partial r}{\partial s}$$

et

$$P = \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} ds.$$

La valeur au point (x, y, z) de la fonction potentielle magnétique de l'aimant tout entier est la somme des quantités P relatives aux différents éléments MM' de l'aimant. On a donc, en désignant par L la longueur de l'aimant,

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \int_0^L \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} ds.$$

Une intégration par parties permet de transformer cette égalité en

$$(1) \qquad \mathcal{V}(x, y, z) = \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_0}{r_0} - \int_0^L \frac{1}{r} \frac{d\mu}{ds} ds,$$

μ_0 et μ_1 étant les valeurs de μ aux points B et A, r_0 et r_1 étant les distances des points B et A au point (x, y, z).

On voit, d'après cette formule (1), que l'on peut remplacer l'action d'un aimant linéaire sur un point extérieur par l'action d'une distribution fictive formée :

1° De deux masses de fluide fictif, respectivement égales à $-\mu_0$ et à μ_1, placées aux extrémités B et A de l'aimant;

2° D'une traînée de fluide fictif, distribuée le long de la ligne s, et ayant pour densité linéaire en chaque point

$$(2) \qquad \lambda = -\frac{d\mu}{ds}.$$

Si, en particulier, la quantité μ est constante tout le long de la ligne s, on aura

$$\mu_1 = \mu_0 = \mu, \qquad \lambda = 0;$$

la formule (1) deviendra

$$\varphi(x, y, z) = \mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right).$$

L'aimant exercera les mêmes actions extérieures que deux quantités égales et de signe contraire de fluide fictif placées en ses deux extrémités. Un semblable aimant est dit *solénoïde magnétique*.

Nous avons vu (Chap. I) que des aiguilles d'acier extrêmement longues se comportaient sensiblement comme des solénoïdes magnétiques.

Coulomb et les expérimentateurs qui, après lui, se sont occupés de l'étude des aimants linéaires que l'on peut faire avec des aiguilles d'acier, ont admis implicitement dans leurs recherches que la quantité μ était égale à 0 aux deux extrémités d'un aimant linéaire.

Cette hypothèse, exprimée par les égalités

$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_1 = 0,$$

semble en contradiction avec ce fait, que les aiguilles d'acier très longues se comportent sensiblement comme des solénoïdes magnétiques. Mais nous verrons tout à l'heure que cette contradiction n'est qu'apparente.

On peut donc adopter l'hypothèse suivante : *dans les aimants linéaires réalisables, la quantité μ est égale à* 0 *aux extrémités,* quitte à vérifier ensuite expérimentalement les conséquences de cette hypothèse.

Moyennant cette hypothèse, les égalités (1) et (2) donnent

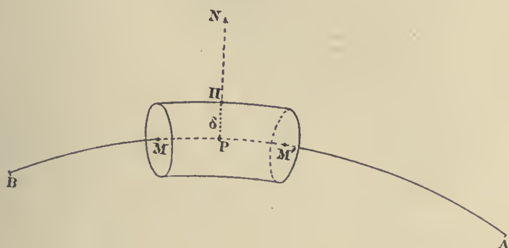
$$\varphi(x, y, z) = \int_0^{L} \frac{\lambda}{r}\, ds.$$

On voit alors que l'étude des propriétés de l'aimant considéré revient à la détermination de la valeur que présente en chaque point la quantité λ.

Nous allons examiner les principes sur lesquels repose cette détermination.

Soit BA (*fig.* 11) une ligne sur laquelle le fluide fictif est distribué avec une densité linéaire continue. Soient P un point de cette ligne et λ la valeur de la densité linéaire en ce point.

Fig. 11.



1° Supposons que le point P ne soit pas une des extrémités de la ligne BA. Par ce point, menons une normale PN à la ligne BA. Sur la normale PN, prenons un point Π dont la distance δ au point P soit infiniment petite. Prenons la ligne BA comme directrice d'une surface canal dont δ sera le rayon. Prenons ensuite sur la ligne BA, de part et d'autre du point P, deux points M, M', dont la distance ds soit infiniment petite. Par les points M, M', menons deux sections droites de la surface canal.

Appliquons les lemmes de Gauss au petit cylindre limité par ces deux sections.

Les deux bases, grâce à la petitesse de δ, fournissent à la somme des composantes normales des infiniment petits d'ordre supérieur. Sur la surface latérale, la composante normale de l'action magnétique peut être regardée comme ayant en tout point la même valeur F_N. La somme des composantes normales a donc pour valeur

$$2\pi\delta\, ds\, F_N.$$

Ces actions proviennent du fluide fictif distribué sur la ligne BA avec la densité λ. On a donc

$$2\pi\delta\, ds\, F_N = 4\pi\lambda\, ds$$

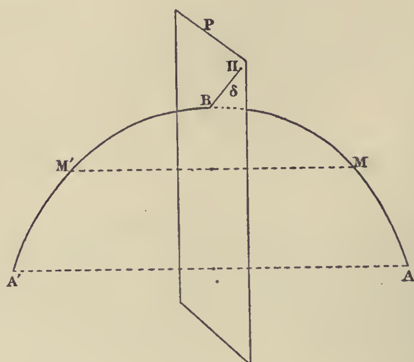
ou

$$\lambda = \frac{1}{2}\delta F_N. \tag{3}$$

2° Ces considérations ne s'appliquent plus à un point P dont

la distance à l'une des extrémités de la ligne BA n'est pas finie. En effet, au voisinage de ce point, F_N pourrait n'être plus une fonction continue de s. Examinons donc directement le cas particulier où le point P coïnciderait avec une des extrémités de l'aimant AB, l'extrémité B par exemple (*fig.* 12).

Fig. 12.



Par l'extrémité B de l'aimant BA, menons un plan P normal à l'aimant. Soit BA' la ligne symétrique de la ligne BA par rapport à ce plan P. Sur la ligne BA' distribuons du fluide fictif, de manière qu'en deux points M, M', symétriques par rapport au plan P, la densité linéaire λ de ce fluide fictif ait la même valeur.

Prenons, dans le plan P, un point Π situé à une distance δ du point B. Soit F_N la composante suivant BΠ de l'action exercée au point Π par le fluide répandu sur la ligne BA. L'action exercée au même point par le fluide répandu sur la ligne A'BA aura pour composante, suivant BΠ, $\varphi_N = 2F_N$. Or, d'après ce qui précède, on aura

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\delta\varphi_N,$$

ou bien

$$\lambda = \delta F_N. \tag{4}$$

Les égalités (3) et (4) conduisent à la proposition suivante :

Une ligne BA *porte du fluide fictif dont la densité linéaire est* λ *au point* P. *Un pôle* Π, *égal à l'unité, est situé à une distance infiniment petite* δ *du point* P *sur une normale* N *à la*

ligne BA *menée par ce point. On mesure la composante* F_N *suivant la normale* N *de l'action exercée au point* H. *Si le point* P *n'est pas une extrémité de la ligne* BA, *on a*

$$\lambda = \frac{1}{2}\delta F_N,$$

et si le point P *est une extrémité de la ligne* BA, *on a*

$$\lambda = \delta F_N.$$

On ne peut déterminer expérimentalement le produit δF_N à une distance infiniment petite δ de la ligne s; la distance δ à laquelle on mesure ce produit est très petite; toutefois, elle doit encore être assez grande pour que l'on puisse, en sa présence, négliger les dimensions transversales de l'aimant. On est ainsi conduit à modifier l'énoncé précédent, et à le remplacer par le suivant :

On détermine la valeur de F_N *à une distance de l'aimant très petite, quoique grande par rapport aux dimensions transversales de l'aimant. Si* δ *est cette distance, on a*

$$\lambda = \frac{k}{2}\delta F_N,$$

k *étant un facteur égal à l'unité pour les points dont la distance à l'extrémité de l'aimant est grande par rapport à* δ, *variable entre* 1 *et* 2 *pour les points dont la distance à l'extrémité de l'aimant est de l'ordre de* δ *et sensiblement égal à* 2 *à l'extrémité de l'aimant.*

Imaginons que l'on ait représenté par la courbe $\alpha\beta\gamma$ (*fig.* 13) la valeur du produit $\frac{1}{2}\delta F_N$ pour chaque valeur de s. λ sera représenté par la courbe $\alpha'\beta'\gamma'$, coïncidant sensiblement avec la précédente pour les valeurs de s qui diffèrent sensiblement de o ou de L, tandis qu'aux extrémités cette nouvelle courbe aura des ordonnées doubles de celles de la courbe précédente.

Ces divers principes avaient été fort bien aperçus par Coulomb [1], tandis qu'ils ont souvent été méconnus par les physiciens qui l'ont suivi, notamment par Gaugain [2].

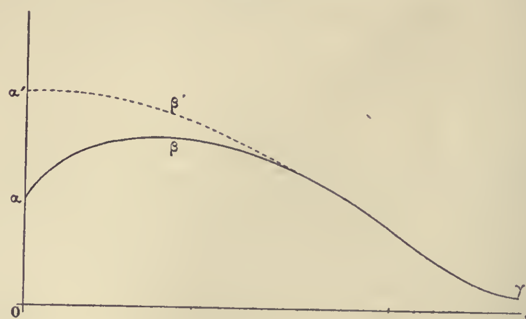
---

(1) COULOMB, *Septième Mémoire sur l'électricité et le magnétisme : Du magnétisme*, art. XIX (*Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1789, p. 473).

(2) GAUGAIN, *Mémoire sur la distribution du magnétisme dans les électro-aimants* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XI, p. 5; 1877).

La détermination de la densité linéaire λ de la distribution fictive est ramenée, d'après ce qui précède, à la détermination de F_N.

Fig 13.



Pour déterminer F_N, Coulomb employait les méthodes indiquées au Chapitre précédent pour un aimant quelconque. Dans le cas où l'aimant linéaire est *rectiligne*, il y a grand avantage à substituer aux méthodes de Coulomb une méthode élégante, fondée sur les propriétés de l'induction électromagnétique. Cette méthode a été imaginée par Van Rees ([1]); elle a été ensuite employée par Gaugain ([2]).

Un petit cercle métallique, de rayon δ, peut se déplacer de manière que son axe coïncide constamment avec l'axe BA de l'aimant. Ce cercle est relié par un double fil métallique à un galvanomètre balistique très éloigné (*fig.* 14).

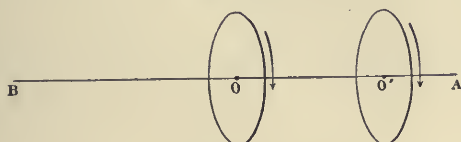
Ce cercle est d'abord au repos, son centre étant en O. On le déplace rapidement, de manière à amener son centre en O′, et on l'arrête de nouveau. Un courant d'induction de peu de durée parcourt ce circuit. Le circuit étant à l'état neutre au début de la modification aussi bien qu'à la fin, ce courant met en mouvement, en chaque point du circuit, la même quantité d'électricité Q, quantité que mesurera l'impulsion donnée au galvanomètre balistique (*voir* Livre XIII, Chap. VII, § 2).

On peut, pour calculer cette quantité, raisonner comme si le

([1]) Van Rees, *Ueber die Vertheilung des Magnetismus in Magneten* (*Poggendorff's Annalen*, t. LXXIV, p. 213; 1849).
([2]) Gaugain, *loc. cit.*

courant qui a traversé le circuit avait été à tout instant uniforme. Le courant ayant une intensité égale à o au commencement et à la fin de la modification, il n'y a pas lieu de tenir compte de l'induction du circuit sur lui-même. L'aimant ne subit, au commencement et à la fin de la modification, l'influence d'aucun courant;

Fig. 14.



son aimantation est donc la même dans les deux cas, et l'on peut, pour calculer la quantité Q, supposer que cette aimantation soit demeurée invariable pendant toute la durée de la modification. On est donc amené à étudier un phénomène d'induction produit par un aimant invariable de forme, de position et d'aimantation dans un circuit qui se déplace en demeurant traversé par un courant uniforme.

Or, comme nous le verrons plus loin (Livre XV, Chap. III), *pour déterminer,* dans ce cas, *le produit* RQ *de la quantité d'électricité mise en mouvement par la résistance du circuit, on imagine que chaque masse magnétique* M *de l'aimant exerce, sur chaque élément dl du conducteur, une force ayant pour grandeur*

$$F = -\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} M \frac{\sin(r, dl)}{r^2} dl,$$

normale au plan de l'élément de courant dl et de la masse M, *et dirigée vers la droite de l'observateur qui, placé en l'élément dl, regarderait la masse* M (*la direction r est comptée de l'élément dl vers la masse* M); *on calcule le travail produit par cette force dans le déplacement du conducteur; il est égal à* — RQ.

Appliquons ces résultats au cas particulier qui nous occupe.

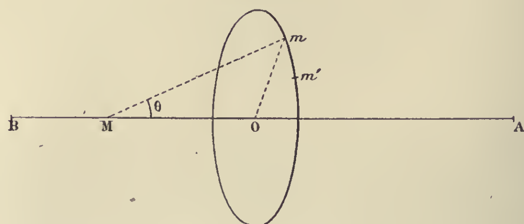
Soit M (*fig.* 15) une des masses magnétiques fictives distribuées sur la ligne BA et $dl = mm'$ un élément du circuit. L'angle (r, dl)

est droit, et la force F a pour valeur

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{M}{r^2}dl.$$

Cette force est normale au plan Mmm'. Le rayon Om ou δ du cercle étant très petit, la direction Mm diffère très peu de la direction MO et le plan MmO est presque normal au plan Mmm'.

Fig. 15.



La force en question est donc située sensiblement dans le plan MmO; elle est sensiblement perpendiculaire à Mm. Soit θ l'angle mMO, la force en question aura, sur la direction BA, une projection sensiblement égale à

$$-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{M\sin\theta}{r^2}dl.$$

L'ensemble des forces agissant sur le petit cercle a, suivant BA, une résultante qui a pour valeur

$$-\frac{\mathfrak{H}}{2}\delta\sum\frac{M\sin\theta}{r^2},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les masses M qui composent l'aimant. Or il est facile de voir que l'on a

$$\sum\frac{M\sin\theta}{r^2} = -F_N.$$

La force en question peut donc s'écrire

$$\frac{\mathfrak{H}}{2}\delta F_N.$$

Lorsqu'on amène le centre du petit cercle de O en O', elle ef-

fectue un travail

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{H}}{2}\delta\int_0^{0'} F_N\,ds.$$

On a donc

$$Q = -\frac{\mathfrak{H}}{2}\frac{\delta}{R}\int_0^{0'} F_N\,ds.$$

Cette formule permettra aisément de déterminer, pour chaque valeur de s, la valeur de δF_N et, par conséquent, la valeur de λ.

Les résultats expérimentalement trouvés peuvent être représentés par la formule

$$(5) \qquad \lambda = a(k^s - k^{L-s}),$$

a et k étant deux constantes qui dépendent de la nature de l'acier employé, des moyens mis en œuvre pour aimanter l'aiguille, enfin du diamètre de cette aiguille.

Les égalités

$$\lambda = -\frac{d\mu}{ds}, \qquad \mu_0 = 0$$

donnent alors

$$(6) \qquad \mu = -\frac{a}{\log k}(k^s + k^{L-s} - k^L - 1).$$

De cette formule on déduit, comme on devait s'y attendre,

$$\mu_1 = 0.$$

Cette formule est due à Biot [1]. Green [2] a cherché à la justifier théoriquement.

Lorsque l'aiguille est très longue et très mince, λ n'a de valeurs sensibles que pour des valeurs de s ou de $(L - s)$ petites par rapport à L; l'aiguille se comporte alors, pour des points un peu éloignés, comme deux masses magnétiques égales et de signes contraires placées en ses deux extrémités. Cette proposition, conforme à l'expérience, n'est pas, on le voit, en contradiction avec l'hypothèse exprimée par les égalités

$$(7) \qquad \mu_0 = 0, \qquad \mu_1 = 0.$$

---

[1] BIOT, *Traité de Physique*, t. III, p. 76; Paris, 1816.

[2] GREEN, *Essay on the application of mathematical Analysis to the theories of electricity and magnetism* (Nottingham, 1828).

Cette hypothèse, exprimée par les égalités (7), sert de fondement à toutes les études expérimentales qui ont servi à établir la formule (6). Il serait évidemment intéressant de pouvoir soumettre la formule (6), ou quelqu'une de ses conséquences, à une vérification expérimentale qui ne fît pas usage des hypothèses (7). La comparaison des moments magnétiques fournit cette vérification.

D'après la formule (6), le moment magnétique d'une aiguille aimantée a pour valeur

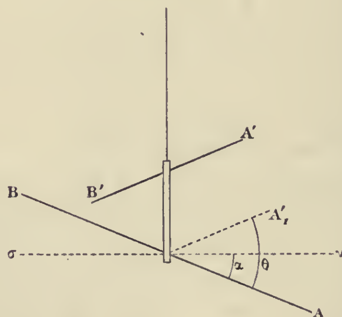
$$(8) \qquad \mathfrak{M} = \int_0^L \mu \, ds = \frac{a}{\log k}\left[(1+k^L)L + \frac{2(1-k^L)}{\log k}\right].$$

Cette formule doit pouvoir représenter le moment magnétique d'aiguilles de longueurs différentes, ayant la même section, faites avec le même acier et aimantées de la même manière.

M. Bouty (¹) a soumis cette formule au contrôle de l'expérience au moyen d'une méthode ingénieuse, qui permet de trouver très rapidement le rapport des moments magnétiques de deux aiguilles aimantées.

Les deux aimants BA, B'A' sont suspendus à un même équipage (*fig.* 16) de manière à être tous deux horizontaux. Ils font

Fig. 16.



entre eux un angle θ. Lorsque ces deux aimants sont en équilibre, la direction BA fait, vers l'est, un angle α avec la direction σν de

(¹) BOUTY, *Études sur le magnétisme*, 1re Partie (*Thèse de Doctorat*, Paris, 1874; *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IV, 1875).

la méridienne magnétique. Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont les moments magnétiques des deux aimants, la condition d'équilibre sera

$$\mathfrak{M} \sin\alpha = \mathfrak{M}' \sin(\theta - \alpha).$$

En particulier, si les deux aiguilles font entre elles un angle droit, cette égalité deviendra

$$\tan g\alpha = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}.$$

La détermination de l'angle α fait connaître le rapport des moments magnétiques des deux aimants.

Les résultats des expériences de M. Bouty concordent à peu près avec les nombres fournis par la formule (8).



CHAPITRE VII.

LES DISTRIBUTIONS SOLÉNOIDALES ET LAMELLAIRES.

§ 1. — De la distribution magnétique solénoïdale.

Sir W. Thomson ([1]) a donné sur la distribution du magnétisme à l'intérieur des aimants quelques théorèmes qui, sans avoir l'importance pratique des propositions relatives à la distribution superficielle, sont cependant remarquables par leur élégance et leur généralité. M. Betti ([2]) a donné un très bel exposé des théorèmes de Sir W. Thomson. Le présent Chapitre sera consacré à reproduire cet exposé.

Nous prendrons pour point de départ le théorème suivant, qui est dû à Jacobi :

Si trois fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *sont, dans un certain espace, uniformes, finies et continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre ; si, de plus, elles vérifient, en tout point de cet espace, l'équation*

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}=0, \tag{1}$$

il existe deux fonctions μ, ν, *qui sont, dans cet espace, uniformes, finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles*

([1]) Sir W. Thomson, *A mathematical theory of magnetism* (*Proceedings of the Royal Society*, juin 1849. — Sir W. Thomson's *Reprint of papers on electrostatics and magnetism*, Art. XXIV, Chap. V).

([2]) Betti, *Teorica delle forze newtoniane e sui applicazioni all' elettrostatica e al magnetismo*, Chap. III, § 3; Pise, 1879.

du premier ordre, et qui sont telles que l'on ait

$$(2)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{\partial\mu}{\partial y}\dfrac{\partial\nu}{\partial z} - \dfrac{\partial\nu}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial z}, \\ \mathcal{B} = \dfrac{\partial\mu}{\partial z}\dfrac{\partial\nu}{\partial x} - \dfrac{\partial\nu}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}, \\ \mathcal{C} = \dfrac{\partial\mu}{\partial x}\dfrac{\partial\nu}{\partial y} - \dfrac{\partial\nu}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}. \end{cases}$$

Ce théorème admis, considérons un aimant et supposons que les trois composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation vérifient, en tout point de l'aimant, la condition (1).

Soient m, n deux paramètres variables et considérons les deux familles de surfaces

$$(3)\qquad \mu = m,$$

$$(4)\qquad \nu = n.$$

Deux de ces surfaces, l'une de la première famille, l'autre de la seconde, se coupent suivant une ligne ; par chaque point $M(x, y, z)$ du corps, il passe une de ces lignes et une seule, puisque ce point correspond à une seule valeur de μ et à une seule valeur de ν. Cette ligne se déplace et se déforme d'une manière continue lorsque les deux paramètres m et n changent de valeur d'une manière continue.

Soient N et N' les normales menées par le point M à la surface

$$\mu = m$$

et à la surface

$$\nu = n$$

qui passent par ce point; soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale N et α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale N'. Nous aurons

$$(5)\quad \begin{cases} \left[\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \alpha = \dfrac{\partial\mu}{\partial x}, \\ \left[\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \beta = \dfrac{\partial\mu}{\partial y}, \\ \left[\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \gamma = \dfrac{\partial\mu}{\partial z} \end{cases}$$

et, de même,

$$(6)\quad \begin{cases} \left[\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\alpha'=\dfrac{\partial\nu}{\partial x},\\ \left[\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\beta'=\dfrac{\partial\nu}{\partial y},\\ \left[\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\gamma'=\dfrac{\partial\nu}{\partial z}. \end{cases}$$

Les égalités (2) deviennent alors

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{A}=(\Pi\mu)^{\frac{1}{2}}(\Pi\nu)^{\frac{1}{2}}(\beta\gamma'-\gamma\beta'),\\ \mathcal{B}=(\Pi\mu)^{\frac{1}{2}}(\Pi\nu)^{\frac{1}{2}}(\gamma\alpha'-\alpha\gamma'),\\ \mathcal{C}=(\Pi\mu)^{\frac{1}{2}}(\Pi\nu)^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta'-\beta\alpha'). \end{cases}$$

Ces trois équations, en nous montrant que les composantes de l'aimantation au point M sont respectivement proportionnelles aux trois quantités

$$(\beta\gamma'-\gamma\beta'),\qquad (\gamma\alpha'-\alpha\gamma'),\qquad (\alpha\beta'-\beta\alpha'),$$

nous montrent que la direction de l'aimantation au point M est normale à la fois aux deux lignes N et N'. D'où ce premier théorème :

Si la condition (1) *est vérifiée en tout point du corps, l'aimantation est en tout point tangente à l'intersection des deux surfaces*

$$\mu=m,\qquad \nu=n$$

qui passent par ce point.

L'intensité d'aimantation au point M est donnée par l'égalité

$$\mathfrak{M}^2=\Pi\mu.\Pi\nu.[(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha')^2].$$

Les identités

$$\begin{aligned}(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2\\ =(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2,\end{aligned}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$
$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$$

transforment cette égalité en

$$(8)\quad \mathfrak{M}^2=\Pi\mu.\Pi\nu.[1-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2].$$

Considérons les quatre surfaces

$$\mu = m, \qquad \nu = n,$$
$$\mu = m + \Delta m, \qquad \nu = n + \Delta n.$$

Elles découpent, dans le corps, un canal infiniment délié, que l'on peut assimiler à un aimant linéaire. D'après le théorème précédent, le long de cet aimant linéaire, l'aimantation est longitudinale.

Soit $M(x, y, z)$ un point de la ligne

$$\begin{cases} \mu = m, \\ \nu = n. \end{cases}$$

Par le point M, menons un plan normal à cette ligne. Ce plan rencontre respectivement les trois lignes

$$\begin{cases} \mu = m + \Delta m, \\ \nu = n; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = m, \\ \nu = n + \Delta n; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = m + \Delta m, \\ \nu = n + \Delta n \end{cases}$$

aux points

$$P\,(x + \Delta x,\ \ y + \Delta y,\ \ z + \Delta z),$$
$$P'(x + \Delta' x,\ \ y + \Delta' y,\ \ z + \Delta' z),$$
$$P''(x + \Delta'' x,\ \ y + \Delta'' y,\ \ z + \Delta'' z).$$

Le parallélogramme $MPP'P''$ est la section droite, au point M, du canal infiniment délié. Si nous désignons par Ω l'aire de ce parallélogramme, nous aurons

$$(9) \qquad \Omega^2 = \overline{MP}^2 . \overline{MP'}^2 . \sin^2 PMP'.$$

On a évidemment

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \mu}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \mu}{\partial z} \Delta z = \Delta m,$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \nu}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \nu}{\partial z} \Delta z = 0.$$

D'ailleurs le plan normal au point M à l'intersection des deux surfaces

$$\mu = m,$$
$$\nu = n$$

est le plan NMN', dont l'équation est

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')(X - x) + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(Y - y) + (\alpha\beta' - \beta\alpha')(Z - z) = 0.$$

Le point P étant dans ce plan, on a

$$(\beta\gamma'-\gamma\beta')\Delta x+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\Delta y+(\alpha\beta'-\beta\alpha')\Delta z=0.$$

Moyennant les égalités (5) et (6), on voit que les trois égalités vérifiées par Δx, Δy, Δz sont les suivantes :

$$\begin{gathered}
\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y+\gamma\,\Delta z=\frac{1}{(\Pi\mu)^{\frac{1}{2}}}\Delta m,\\
\alpha'\Delta x+\beta'\Delta y+\gamma'\Delta z=0,\\
(\beta\gamma'-\gamma\beta')\Delta x+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\Delta y+(\alpha\beta'-\beta\alpha')\Delta z=0,
\end{gathered}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\Delta x&=\frac{[\beta'(\alpha\beta'-\beta\alpha')-\gamma'(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')]\Delta m}{(\Pi\mu)^{\frac{1}{2}}[(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2]},\\
\Delta y&=\frac{[\gamma'(\beta\gamma'-\gamma\beta')-\alpha'(\alpha\beta'-\beta\alpha')]\Delta m}{(\Pi\mu)^{\frac{1}{2}}[(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2]},\\
\Delta z&=\frac{[\alpha'(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')-\beta'(\beta\gamma'-\gamma\beta')]\Delta m}{(\Pi\mu)^{\frac{1}{2}}[(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2]}
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
\overline{\mathrm{MP}}^2&=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\\
&=\frac{1}{\Pi\mu}\,\frac{1}{[(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2]^2}\\
&\quad\times\{[\beta'(\alpha\beta'-\beta\alpha')-\gamma'(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')]^2\\
&\quad+[\gamma'(\beta\gamma'-\gamma\beta')-\alpha'(\alpha\beta'-\beta\alpha')]^2\\
&\quad+[\alpha'(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')-\beta'(\beta\gamma'-\gamma\beta')]^2\}(\Delta m)^2.
\end{aligned}\right.$$

Soit L la ligne

$$\begin{aligned}\mu&=m,\\ \nu&=n.\end{aligned}$$

La normale au plan LMN′ étant désignée par $\mathcal{N}$, on aura

$$\begin{aligned}
\cos(\mathcal{N},x)&=\beta'(\alpha\beta'-\beta\alpha')-\gamma'(\gamma\alpha'-\alpha\gamma'),\\
\cos(\mathcal{N},y)&=\gamma'(\beta\gamma'-\gamma\beta')-\alpha'(\alpha\beta'-\beta\alpha'),\\
\cos(\mathcal{N},z)&=\alpha'(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')-\beta'(\beta\gamma'-\gamma\beta').
\end{aligned}$$

Dès lors, en vertu de l'égalité

$$\cos^2(\mathcal{N},x)+\cos^2(\mathcal{N},y)+\cos^2(\mathcal{N},z)=1,$$

l'égalité (10) deviendra

$$\overline{\text{MP}}^2 = \frac{1}{\Pi\mu} \frac{(\Delta m)^2}{[(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2]^2}$$

ou bien

(11)
$$\overline{\text{MP}}^2 = \frac{1}{\Pi\mu} \frac{(\Delta m)^2}{[1 - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2]^2}.$$

On a, de même,

(12)
$$\overline{\text{MP}'}^2 = \frac{1}{\Pi\nu} \frac{(\Delta n)^2}{[1 - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2]}.$$

Enfin

(13)
$$\sin^2 \text{PMP}' = 1 - \cos^2 \text{NMN}' = 1 - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2.$$

En vertu des égalités (11), (12) et (13), l'égalité (9) devient

$$\Omega^2 = \frac{(\Delta m . \Delta n)^2}{\Pi\mu . \Pi\nu . [1 - (\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma')^2]},$$

égalité qui, comparée à l'égalité (8), donne

$$(\mathfrak{M}\Omega)^2 = (\Delta m . \Delta n)^2.$$

Le produit $\mathfrak{M}\Omega$ garde donc la même valeur absolue tout le long du canal infiniment délié considéré; ce canal constitue ce que nous avons appelé, au Chapitre précédent, un *solénoïde magnétique*. Nous arrivons donc à la proposition suivante :

Si les composantes de l'aimantation satisfont en tous les points d'un corps à la condition

(1)
$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} = 0,$$

il existe deux familles de surfaces découpant le corps en canaux infiniment déliés dont chacun est un solénoïde magnétique.

Sir W. Thomson a donné le nom de *distribution magnétique solénoïdale* à une distribution dont les composantes vérifient en tout point l'égalité (1). Nous avons vu (Chap. IV, § 2) qu'une semblable distribution jouissait de propriétés remarquables.

§ 2. — De la distribution lamellaire simple.

Supposons maintenant qu'en tout point d'un aimant simplement connexe les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation soient des fonctions uniformes finies et continues de x, y, z, et qu'il en soit de même de leurs dérivées partielles du premier ordre. Supposons en outre que ces dérivées vérifient les conditions

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y} - \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Dans ce cas, il existera une fonction $\varphi(x, y, z)$ uniforme, finie et continue, telle que l'on ait

$$(15)\qquad \mathcal{A} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mathcal{B} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \mathcal{C} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Considérons un paramètre variable f. La surface

$$(16)\qquad \varphi = f$$

est, ou bien une surface fermée contenue en entier à l'intérieur de l'aimant, ou bien une aire limitée ayant son contour à la surface de l'aimant. Par tout point de l'aimant, il passe une et une seule de ces surfaces. Lorsque le paramètre f varie d'une manière continue, cette surface se déforme d'une manière continue, de manière à balayer tout l'espace occupé par l'aimant.

Soit N la normale en un point de la surface S représentée par l'égalité (16), cette normale étant dirigée du côté où f va en croissant. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de cette normale. Nous aurons

$$(16)\qquad (\Pi\varphi)^{\frac{1}{2}}\,\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad (\Pi\varphi)^{\frac{1}{2}}\,\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad (\Pi\varphi)^{\frac{1}{2}}\,\gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

D'après ces équations, les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont, en chaque point, proportionnelles aux quantités α, β, γ. D'où ce théorème :

L'aimantation est, en chaque point du corps, normale à la surface S *qui passe par ce point.*

Les égalités (15) donnent

$$\mathfrak{M}^2 = \Pi \varphi. \tag{17}$$

Menons la surface S représentée par l'équation

$$\varphi = f,$$

puis la surface S′ représentée par l'équation

$$\varphi = f + \Delta f.$$

Soit M un point de la surface S. Par ce point, menons une normale à la surface S et limitons-la au point M′ où elle rencontre la surface S′. Nous aurons

$$\Delta f = \overline{\mathrm{MM}'}.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma\right),$$

ou bien, d'après les égalités (16),

$$(\Pi\varphi)^{\frac{1}{2}}.\overline{\mathrm{MM}'} = \Delta f.$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (17), donne

$$\mathfrak{M}.\overline{\mathrm{MM}'} = \Delta f.$$

Le produit de l'aimantation en un point de la surface S *par la distance normale entre les deux surfaces* S *et* S′ *a même valeur en tout point de la surface* S.

Nous nommerons *feuillet magnétique* une couche aimantée, comprise entre deux surfaces infiniment voisines, dont l'aimantation est, en chaque point, normale à la couche et en raison inverse de l'épaisseur de la couche. Nous voyons alors que les deux surfaces S et S′ limitent, dans l'aimant, un feuillet magnétique, ouvert ou fermé, ce qui nous conduit au théorème suivant :

Si les trois composantes de l'aimantation vérifient, en tout point, les conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} = 0,\end{aligned}\right. \tag{14}$$

il existe une famille de surfaces décomposant l'aimant en

lamelles infiniment minces, fermées ou ouvertes, dont chacune est un feuillet magnétique.

Sir W. Thomson donne le nom de *distribution lamellaire simple* à une semblable distribution magnétique.

Pour que les conditions (1) et (14) soient vérifiées en même temps, il faut et il suffit qu'il existe une fonction φ vérifiant à la fois les conditions (15) et la condition

$$\Delta\varphi = 0;$$

donc, *pour qu'une distribution soit à la fois solénoïdale et lamellaire simple, il faut et il suffit que les trois composantes de l'aimantation soient en chaque point égales aux dérivées partielles du premier ordre d'une même fonction harmonique des coordonnées.*

Nous verrons au Livre suivant que, d'après la théorie de Poisson, un morceau de fer doux, aimanté par influence, se trouverait dans ces conditions.

§ 3. — De la distribution sur un aimant quelconque.

Considérons maintenant un aimant à l'intérieur duquel les trois quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont assujetties seulement à être uniformes, finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier et du second ordre. L'identité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}\right) = 0,$$

jointe au théorème de Jacobi, que nous avons énoncé au début du § 1, nous montre qu'il existe toujours deux fonctions $\mu(x, y, z)$, $\nu(x, y, z)$ uniformes, finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, telles que l'on puisse écrire

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \nu}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial \nu}{\partial y},\\ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} &= \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial z},\\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} &= \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \nu}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

Ces égalités (18) peuvent encore s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{B} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{C} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{C} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{A} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{A} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{B} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial y}\right).$$

D'après ces égalités, il doit exister une fonction φ telle que l'on ait

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces égalités (19) nous montrent que toute distribution magnétique peut être regardée comme la superposition de deux distributions : l'une, représentée par les formules

$$\mathcal{A}' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mathcal{B}' = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \mathcal{C}' = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

est une distribution lamellaire simple; l'autre est représentée par les équations

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}'' = \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial x}, \\ \mathcal{B}'' = \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial y}, \\ \mathcal{C}'' = \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial z}. \end{cases}$$

Étudions cette dernière distribution.

L'aimantation, dans cette seconde distribution, est normale en tout point à celle des surfaces représentées par l'équation

$$\mu = m,$$

où m est un paramètre variable, qui passe par ce point.

L'intensité d'aimantation est déterminée par l'égalité

$$(21)\qquad \mathfrak{M}^2 = \nu^2.\Pi\mu.$$

Considérons la surface S, représentée par l'équation

$$\mu = m,$$

et la surface infiniment voisine S', représentée par l'équation

$$\mu = m + \Delta m.$$

Ces deux surfaces limitent une lamelle, dont l'épaisseur $\overline{MM'}$ a pour valeur

$$\overline{MM'} = \frac{\Delta m}{(\Pi\mu)^{\frac{1}{2}}}. \tag{22}$$

La comparaison des égalités (21) et (22) donne

$$\mathfrak{M}.\overline{MM'} = |\nu.\Delta m|.$$

Le produit de l'aimantation par l'épaisseur de la couche n'a pas une même valeur en tout point de la couche; sa valeur est proportionnelle, en chaque point, à la valeur de la fonction ν en ce point. Une distribution formée de semblables lamelles est ce que Sir W. Thomson nomme une *distribution lamellaire composée*.

Ainsi, *toute distribution magnétique continue peut être regardée comme la superposition d'une distribution lamellaire simple et d'une distribution lamellaire composée*.

Si les composantes de l'aimantation vérifient les conditions (14), la distribution lamellaire simple subsiste seule.

§ 4. — Décomposition d'une distribution quelconque en une distribution lamellaire simple et une distribution solénoïdale.

Soient (x', y', z') un point quelconque du volume occupé par l'aimant; $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ les composantes de l'aimantation en ce point; r la distance du point (x, y, z) de l'espace au point (x', y', z'). Considérons trois fonctions de x, y, z définies de la manière suivante

$$\left\{\begin{aligned} F &= \int \frac{\mathcal{A}'}{r}\,dv', \\ G &= \int \frac{\mathcal{B}'}{r}\,dv', \\ H &= \int \frac{\mathcal{C}'}{r}\,dv', \end{aligned}\right. \tag{23}$$

les intégrations s'étendant au volume entier de l'aimant.

Posons ensuite

$$(24)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\partial G}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ b = \dfrac{\partial H}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial z}, \\ c = \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial x}, \\ \psi = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces égalités (24) entraînent les identités

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial z} = \Delta F - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial a}{\partial z} - \dfrac{\partial c}{\partial x} = \Delta G - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} - \dfrac{\partial a}{\partial y} = \Delta H - \dfrac{\partial \psi}{\partial z}. \end{cases}$$

Mais, d'après les égalités (23), on a, en tout point de l'aimant,

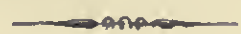
$$\Delta F = -4\pi \mathcal{A},$$
$$\Delta G = -4\pi \mathcal{B},$$
$$\Delta H = -4\pi \mathcal{C}.$$

Les égalités (25) peuvent donc s'écrire

$$4\pi \mathcal{A} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right),$$
$$4\pi \mathcal{B} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right),$$
$$4\pi \mathcal{C} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} - \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right).$$

Ces nouvelles égalités démontrent le théorème suivant :

Toute distribution magnétique continue peut être regardée comme résultant de la superposition d'une distribution solénoïdale et d'une distribution lamellaire simple.



CHAPITRE VIII.

MÉRIDIENS MAGNÉTIQUES ET PARALLÈLES MAGNÉTIQUES.

§ 1. — Distribution de la force tangentielle à la surface d'un corps quelconque.

Dans l'étude du magnétisme terrestre, on détermine avec grand soin, en chaque point de la surface du globe, la valeur de la déclinaison magnétique et de la composante horizontale de l'intensité magnétique; c'est dire que l'on étudie, en chaque point de la surface du globe, la grandeur et la direction de la composante tangentielle de la force magnétique.

Gauss [1] a donné, au sujet de la distribution de cette composante tangentielle à la surface du globe, un certain nombre de beaux théorèmes. Parmi ces théorèmes, les uns sont généraux et peuvent s'appliquer à l'étude de la composante tangentielle de la force à la surface d'un aimant quelconque. Les autres ne peuvent s'appliquer qu'à un corps de forme sphérique, comme la terre. Nous allons étudier d'abord les premiers, puis les seconds.

Considérons donc un corps que nous supposerons simplement connexe et dont la surface ne présentera aucune singularité. Soit $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de ce corps.

Cette fonction ne peut avoir la même valeur en tous les points de la surface du corps, car alors la couche superficielle fictive qui équivaut à l'aimant remplirait les conditions de l'équilibre électrostatique. Comme cette couche renferme autant de fluide positif que de fluide négatif, elle aurait une densité nulle en tout

[1] C.-F. Gauss, *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus* (*Resultate aus der Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre* 1838, publiés par Gauss et Weber; Leipzig, 1839. — Gauss, *Werke*, Bd. V, p. 121).

point de la surface du corps, et l'aimant n'aurait aucune action aux points qui lui sont extérieurs. Nous excluons ce cas particulier de nos recherches.

La fonction potentielle magnétique varie donc à la surface de l'aimant et ses variations admettent forcément une limite supérieure A et une limite inférieure B. Comme la fonction potentielle magnétique est une fonction continue, chacune des valeurs comprises entre A et B, sans omettre ni la valeur A ni la valeur B, est prise par elle à la surface de l'aimant.

Soit C une valeur comprise entre A et B. Les points de la surface de l'aimant où la fonction potentielle a des valeurs comprises entre A et C doivent être séparés des points où la fonction potentielle a une valeur comprise entre C et B par une région où la fonction potentielle a la valeur C. On pourra toujours, par les points de la surface de l'aimant où la fonction potentielle a la seule valeur C, faire passer au moins une ligne fermée. Il se pourra que ces points ne forment pas seulement cette ligne fermée, mais qu'encore certains d'entre eux soient isolés, ou forment des segments de ligne, ou couvrent des espaces d'étendue finie.

L'égalité

$$\mathfrak{V} = C \tag{1}$$

définit donc, en général, une ligne fermée tracée à la surface de l'aimant; cette ligne se nomme un *parallèle magnétique*.

Dans l'espace, l'égalité

$$\mathfrak{V} = C$$

définit une surface de niveau à laquelle la force magnétique est normale en chaque point. Dès lors, il est aisé de voir que *la composante tangentielle de la force est, en chaque point du corps, ou nulle, ou normale au parallèle magnétique qui passe par ce point.*

Nous donnerons le nom de *méridien magnétique* à toute ligne tracée à la surface de l'aimant et tangente en chacun de ses points à la composante tangentielle de la force. Le théorème précédent peut alors s'énoncer ainsi :

Les méridiens magnétiques et les parallèles magnétiques forment, à la surface de l'aimant, deux familles de lignes découpant cette surface en rectangles infiniment petits.

Donnons successivement au paramètre C les valeurs

$$C,\quad C+\varepsilon,\quad C+2\varepsilon,\quad \ldots,\quad C+(n-1)\varepsilon,\quad C+n\varepsilon,\quad \ldots,$$

ε étant une quantité infiniment petite.

Au moyen de l'équation (1), nous tracerons à la surface de l'aimant des parallèles magnétiques

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad \ldots,\quad P_{n-1},\quad P_n,\quad \ldots$$

infiniment voisins les uns des autres.

Soit M un point du parallèle P_{n-1}. Soit H la composante tangentielle de l'action magnétique, cette action étant comptée positivement du parallèle P_{n-1} vers le parallèle P_n. La force H est tangente à la méridienne magnétique du point M. Cette méridienne magnétique rencontre en M' le parallèle P_n. On a alors, d'après les propriétés fondamentales de la fonction potentielle magnétique,

$$H = \frac{\mathcal{V}(M) - \mathcal{V}(M')}{\overline{MM'}} = -\frac{\varepsilon}{\overline{MM'}}.$$

D'ailleurs, si l'on se borne à considérer les infiniment petits du premier ordre, $\overline{MM'}$ est, en général, égal à la distance δ des deux parallèles infiniment voisins, P_{n-1}, P_n. On a donc

$$(2)\qquad H = -\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

La composante tangentielle de l'action magnétique est, en chaque point, mesurée par l'inverse de la distance de deux parallèles magnétiques; elle est, en chaque point, normale au parallèle magnétique et dirigée dans le sens où la fonction potentielle magnétique décroît.

Le long d'un même méridien magnétique, parcouru dans un sens bien déterminé, la composante tangentielle de l'action magnétique, comptée positivement dans ce sens, n'a pas forcément un signe constant; mais, à cause de sa continuité, elle doit garder le même signe tout le long d'arcs continus séparés les uns des autres par des points où elle a la valeur o. C'est un semblable arc continu, le long duquel la composante tangentielle de l'action magnétique garde un sens invariable, que nous nommerons désormais *un* méridien magnétique.

Un méridien magnétique ne peut former une ligne fermée.

Désignons, en effet, par ds l'élément d'arc d'un méridien magnétique; d'après la définition précédente, la quantité $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s}$ ne peut changer de signe le long du même méridien. L'intégrale

$$\int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s} ds,$$

étendue à une portion d'un méridien ou à ce méridien tout entier, ne peut donc jamais être égale à o. Or, la fonction $\mathcal{V}$ étant une fonction uniforme et continue, l'intégrale précédente, étendue à une courbe fermée quelconque, est égale à o. Un méridien ne peut donc se fermer de lui-même.

Un même méridien ne peut couper plus d'une fois un même parallèle.

En effet, la fonction $\mathcal{V}$ ayant la même valeur en tous les points d'un même parallèle, si un méridien coupait plus d'une fois un même parallèle, l'intégrale

$$\int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s} ds,$$

étendue à un segment du méridien compris entre deux rencontres avec ce parallèle, serait égale à o, contrairement à ce que nous venons de voir.

Ainsi, *un méridien magnétique forme forcément, à la surface du corps, un segment limité par deux points; la fonction potentielle n'a pas la même valeur en ces deux points; en ces deux points, la composante tangentielle de l'action magnétique est nulle, et, par conséquent, l'action magnétique est ou nulle, ou normale à la surface du corps.*

Nous nommerons *pôle magnétique* un point de la surface du corps où la force tangentielle est égale à zéro. Ce mot prend ici un sens conforme à celui qu'on lui attribue dans l'étude du magnétisme terrestre, mais tout différent de celui qu'on lui attribue, en général, dans la partie de la Physique qui traite des aimants.

Le théorème précédent nous montre que tout méridien magnétique part d'un pôle pour arriver à un pôle.

Soit P un pôle magnétique; soit s un arc tracé sur la surface et

passant par le pôle P. La composante de l'action magnétique suivant la tangente à l'arc s a pour valeur

$$-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s}.$$

Pour que le point P soit un pôle magnétique, il faut et il suffit que cette composante soit égale à o quel que soit l'arc s.

Donc, *pour qu'un point soit un pôle magnétique à la surface du corps, il faut et il suffit que la dérivée de la fonction potentielle suivant l'arc de toute courbe tracée sur la surface et passant par ce point soit égale à* o *en ce point.*

Dès lors, trois circonstances différentes peuvent se présenter en un pôle magnétique :

1° Il peut arriver qu'en un pôle magnétique la fonction potentielle magnétique ait une valeur plus petite qu'aux points voisins de la surface du corps.

Dans ce cas, si l'on fait usage de l'égalité (2) pour déterminer la composante tangentielle de l'action magnétique en un point voisin du pôle, on trouve que cette composante est dirigée vers le pôle. Le pôle attire une masse de fluide austral placée à son voisinage et assujettie à se mouvoir à la surface du corps. Le pôle est un *pôle nord*.

2° Il peut arriver qu'en un pôle magnétique la fonction potentielle magnétique ait une valeur plus grande qu'aux points voisins de la surface du corps.

Dans ce cas, si l'on fait usage de l'égalité (2) pour déterminer la composante tangentielle de l'action magnétique en un point voisin du pôle, on trouve que cette composante tend à écarter du pôle son point d'application. Le pôle repousse une masse de fluide austral placée à son voisinage et assujettie à se mouvoir à la surface du corps. Le pôle est un *pôle sud*.

3° Il peut arriver qu'en un pôle magnétique passent des lignes partageant le domaine de ce pôle en plusieurs régions, dont le nombre est au moins quatre; les unes, R, R', ..., où la fonction potentielle a une valeur plus grande qu'au pôle; les autres, ρ, ρ', ..., où la fonction potentielle a une valeur plus petite qu'au pôle. Une masse de fluide austral, placée dans le domaine du pôle et assujettie à se mouvoir à la surface du corps, est repoussée par

le pôle si elle se trouve dans une des régions R, R′, ..., et attirée par le pôle si elle se trouve dans une des régions ρ, ρ′, ... Le pôle se comporte comme un pôle sud pour les premières régions, comme un pôle nord pour les autres. Nous dirons qu'il constitue un *pôle mixte*.

Nous savons qu'il existe à la surface de tout corps au moins un point où la fonction potentielle atteint sa valeur maxima A et un point où la fonction potentielle atteint sa valeur minima B. *Il existe donc, à la surface de tout corps aimanté, au moins un pôle magnétique nord et un pôle magnétique sud.*

Si, à la surface d'un corps aimanté, il existe deux pôles de même nom, il existe à la surface de ce corps au moins un pôle mixte.

Imaginons, par exemple, qu'à la surface d'un corps aimanté il existe deux pôles sud, P et P′. Ces deux pôles correspondent à deux valeurs A et A′ de la fonction potentielle qui sont deux maxima. Supposons, pour fixer les idées,

$$A \geqq A'.$$

Considérons le lieu des points pour lesquels on a

$$\mathcal{V} = A' - \varepsilon.$$

On peut toujours prendre la quantité ε assez petite pour que $(A' - \varepsilon)$ soit supérieur à la limite inférieure B des valeurs de la fonction potentielle sur la surface. Il y aura alors, sur la surface, des points répondant à cette valeur de la fonction potentielle. Parmi ces points se trouvent tous les points d'une certaine courbe fermée séparant les régions R dans lesquelles $\mathcal{V}$ a une valeur supérieure à $(A' - \varepsilon)$, des régions R′ où $\mathcal{V}$ a une valeur inférieure à $(A' - \varepsilon)$. Les points P et P′ sont dans la région R.

On pourra toujours prendre ε assez petit pour que le domaine du point P′ à l'intérieur duquel $\mathcal{V}$ est compris entre A′ et $(A' - \varepsilon)$ soit plus petit que toute surface donnée; assez petit, par conséquent, pour que ce domaine ne renferme pas le point P. Pour une telle valeur de ε, la région R doit se décomposer au moins en deux parties linéairement connexes : l'une ρ, entourant le point P′, l'autre $\mathcal{R}$, contenant le point P à son intérieur.

Faisons croître ε, de manière que $(A' - \varepsilon)$ tende vers B. Les

régions ρ et $\mathcal{R}$ tendront à couvrir la surface entière du corps. Les contours de ces deux régions ne pourront donc demeurer toujours à distance finie. Il pourra arriver que ces deux contours demeurent distincts jusqu'à ce que $(A' - \varepsilon)$ atteigne la valeur B, et se confondent alors dans toute leur étendue. Dans ce cas, il y aurait à la surface du corps toute une ligne fermée où $\mathfrak{V}$ aurait la valeur B, c'est-à-dire toute une ligne de pôles nord.

Excluons ce cas exceptionnel. Les deux contours prendront, en général, des points communs lorsque $(A' - \varepsilon)$ prendra une valeur A'' supérieure à B. Il pourra se faire que ces points communs forment une ligne d'étendue finie; mais excluons encore ce cas particulier. En général, pour la valeur A'' de la fonction potentielle magnétique, les deux contours viendront se toucher en un certain nombre de points isolés. Soit P'' un de ces points. La ligne

$$\mathfrak{V} = A'',$$

passant par le point P'', partage le domaine de ce point en plusieurs régions.

Les unes font partie des régions ρ et $\mathcal{R}$. La fonction potentielle y a une valeur supérieure à A''. Pour les points placés dans cette région, le point P'' se comporte comme un pôle nord.

Les autres font partie de la région R'. La fonction potentielle y a une valeur inférieure à A''. Pour les points placés dans cette région, le point P'' se comporte comme un pôle sud.

Le point P'' est donc un pôle mixte, ce qui justifie la proposition que nous avions énoncée.

M. Betti (¹) a démontré ce beau théorème :

Si la surface d'un corps aimanté est une surface simplement connexe et si le nombre des pôles magnétiques qu'elle porte est un nombre fini, ce nombre est pair.

Reproduisons ici la démonstration qu'il a donnée :

A la surface du corps se trouvent au moins un pôle nord N et un pôle sud S. Concevons, sur la surface du corps, un système de courbes C partant toutes du pôle sud S, arrivant toutes au pôle nord N, dont aucune ne passe deux fois par le même point,

(¹) BETTI, *Theoria delle forze Newtoniane e sui applicazioni all' elettrostatica e al magnetismo*, Ch. III, § 2; Pise, 1879.

dont aucune ne rencontre une autre courbe du système en dehors des points S et N, et telles que par tout point de la surface du corps il passe une de ces courbes. Cela sera toujours possible, pourvu que le corps occupe un espace simplement connexe.

Si l'on parcourt une courbe C du point S au point N, la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}$ sera décroissante au début de ce parcours et encore décroissante à la fin. Sa dérivée suivant l'arc de toute courbe tracée sur la surface étant supposée continue, la suite des valeurs qu'elle prendra le long de ce parcours ne présentera ni maximum ni minimum, ou bien présentera un nombre égal de maxima et de minima.

Désignons par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les points d'une courbe C où la valeur de $\mathcal{V}$ sur cette courbe devient minimum; par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les points, en égal nombre sur cette courbe, où la valeur de $\mathcal{V}$ devient maximum. Les points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont supposés rangés dans l'ordre où on les rencontre en allant du point S au point C. Il en est de même des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Il est facile de voir qu'entre les points β_{i-1} et β_i se trouve toujours un et un seul des points α, le point α_i; qu'entre les points α_i et α_{i+1} se trouve toujours un et un seul des points β, le point β_i.

Prenons une de celles des courbes C pour lesquelles le nombre n a la plus grande valeur, et appliquons-lui ce que nous venons de dire d'une manière générale.

Soient d_i le lieu des points α_i et D_i le lieu des points β_i lorsque l'on fait varier la courbe C. Ou bien la courbe d_i ne rencontre jamais les deux courbes D_{i-1} et D_i entre lesquelles elle est comprise; elle forme alors une courbe fermée sur elle-même. Ou bien elle rencontre une des deux courbes D_{i-1}, D_i et forme avec elle une courbe fermée.

Il y a donc en général, sur la surface S, un certain nombre m de courbes d fermées; un nombre égal de courbes D fermées et un nombre $(n - m)$ de courbes fermées dD, composées d'une courbe d et d'une courbe D.

Parcourons dans un sens déterminé une courbe fermée tracée sur la surface; la fonction $\mathcal{V}$, étant une fonction uniforme, reprend sa valeur après ce parcours; il en est de même de sa dérivée $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s}$ suivant l'arc de la courbe; cette dérivée, qui est une fonction con-

tinue de l'arc s, change donc de signe un nombre pair de fois. Donc, le long de toute courbe fermée tracée sur la surface du corps, la fonction potentielle présente un nombre égal de maxima et de minima.

La fonction $\mathcal{V}$ présente donc sur l'une quelconque des courbes d, D, dD, un même nombre de maxima et de minima.

Or, si la fonction $\mathcal{V}$ est minimum en un point b d'une courbe d, ce point est un pôle nord.

En effet, considérons tous les segments de courbes C qui se trouvent dans le domaine du point b. Sur chacun de ces segments, la valeur minima de $\mathcal{V}$ se trouve à la rencontre de la courbe d, et sur la courbe d la valeur minima de $\mathcal{V}$ se trouve au point b. La valeur de $\mathcal{V}$ au point b est donc plus petite qu'en tout lieu du domaine du point b.

D'autre part, si la fonction $\mathcal{V}$ est maxima en un point a d'une courbe d, ce point est un pôle mixte.

En effet, la valeur de $\mathcal{V}$ au point a est évidemment croissante si l'on s'éloigne du point a sur l'une ou l'autre des deux directions de la courbe C qui passent par ce point, et décroissante si l'on s'éloigne du point a sur l'une ou l'autre des deux directions de la courbe d qui passent par ce point.

Toute courbe fermée d contient donc un nombre égal de pôles nord et de pôles mixtes.

De même toute courbe fermée D contient un nombre égal de pôle sud et de pôles mixtes.

Envisageons maintenant une courbe fermée dD. Elle contient un certain nombre de points où la valeur de $\mathcal{V}$ sur cette courbe passe par un maximum et un nombre égal de points où elle passe par un minimum.

Tout point de cette courbe où $\mathcal{V}$ est un minimum est un pôle nord s'il se trouve sur la portion d et un pôle mixte s'il se trouve sur la portion D. Tout point de cette courbe où $\mathcal{V}$ est maximum est un pôle sud s'il se trouve sur la portion D et un pôle mixte s'il se trouve sur la portion d.

Chacune des courbes d, D, dD, contenant un nombre de pôles pair ou nul, le nombre des pôles magnétiques à la surface d'un corps aimanté quelconque est pair s'il est fini. C'est le théorème énoncé et démontré par M. Betti.

§ 2. — Du magnétisme terrestre.

Aux théorèmes généraux que nous venons d'exposer, Gauss en a joint quelques autres qui supposent essentiellement que l'aimant ait la forme sphérique; ces théorèmes s'appliquent donc à l'aimant terrestre et nous font connaître d'intéressantes propriétés de la composante horizontale de l'action magnétique à la surface de la terre.

Ce sont ces propositions que nous allons maintenant démontrer.

La première de ces propositions concerne les propriétés du *polygone de Gauss*. Elle découle immédiatement, comme nous l'allons voir, des propriétés les plus simples de la fonction potentielle magnétique.

Soient M_0, M_1 deux points situés à la surface du globe. Supposons qu'une quantité de fluide magnétique égale à l'unité passe du point M_0 au point M_1 par un chemin quelconque.

Le travail accompli par les actions que le magnétisme terrestre exerce sur cette charge est indépendant de ce chemin. Il a pour valeur

$$\mathcal{V}(M_0) - \mathcal{V}(M_1),$$

$\mathcal{V}(M_0)$, $\mathcal{V}(M_1)$ étant les valeurs de la fonction potentielle magnétique aux points M_0, M_1.

Supposons que le chemin parcouru par la masse magnétique soit le chemin M_0MM_1, situé tout entier à la surface de la terre; soit H la valeur au point M de la composante horizontale du magnétisme terrestre; soit t l'angle que la ligne M_0MM_1 fait, en M, avec la méridienne magnétique du point M; soit enfin ds un élément de longueur de la ligne M_0MM_1. Le travail produit aura pour valeur

$$\int_{M_0}^{M_1} H \cos t \, ds.$$

On aura donc

$$\int_{M_0}^{M_1} H \cos t \, ds = \mathcal{V}(M_0) - \mathcal{V}(M_1).$$

Si l'on prend comme contour d'intégration une courbe fermée

quelconque tracée à la surface de la terre, on aura

$$\int \mathrm{H} \cos t\, ds = 0.$$

Prenons à la surface de la terre un polygone fermé, limité par des arcs de grand cercle et appliquons-lui l'égalité précédente. Pour simplifier les calculs, supposons que ce polygone se réduise à un triangle $M_0 M_1 M_2$. Nous aurons alors

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathrm{H} \cos t\, ds + \int_{M_1}^{M_2} \mathrm{H} \cos t\, ds + \int_{M_2}^{M_0} \mathrm{H} \cos t\, ds = 0.$$

Transformons l'expression

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathrm{H} \cos t\, ds.$$

Supposons que le grand cercle $M_0 M_1$ fasse avec la méridienne géographique, et à l'est de celle-ci, un angle $(0, 1)$. Supposons, en outre, qu'au point M de l'arc $M_0 M_1$ la déclinaison magnétique, supposée orientale, ait une valeur δ. Nous aurons alors, au point M,

$$t = (0, 1) - \delta,$$

ce qui donne

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathrm{H} \cos t\, ds = \int_{M_0}^{M_1} \mathrm{H} \cos [(0, 1) - \delta]\, ds.$$

H et δ sont des fonctions de s; mais, si les deux stations M_0, M_1 *sont peu éloignées,* on pourra approximativement remplacer, dans l'intégrale précédente, la quantité

$$\mathrm{H} \cos [(0, 1) - \delta]$$

par la quantité

$$\frac{1}{2} \left\{ \mathrm{H}_0 \cos [(0, 1) - \delta_0] + \mathrm{H}_1 \cos [(0, 1) - \delta_1] \right\},$$

moyenne des valeurs que la quantité précédente prend aux extrémités de l'arc $M_0 M_1$. On aura alors

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathrm{H} \cos t\, ds = \frac{M_0 M_1}{2} \left\{ \mathrm{H}_0 \cos [(0, 1) - \delta_0] + \mathrm{H}_1 \cos [(0, 1) - \delta_1] \right\}.$$

Pour le triangle $M_0 M_1 M_2$ on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & M_0M_1 \{ H_0 \cos[(0,1)-\delta_0] + H_1 \cos[(0,1)-\delta_1] \} \\ & + M_1M_2 \{ H_1 \cos[(1,2)-\delta_1] + H_2 \cos[(1,2)-\delta_2] \} \\ & + M_2M_0 \{ H_2 \cos[(2,0)-\delta_2] + H_0 \cos[(2,0)-\delta_0] \} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on connaît la valeur de la déclinaison magnétique en trois points du globe, modérément écartés les uns des autres, et la valeur de la composante horizontale du magnétisme terrestre en deux de ces points, on peut, par cette formule, calculer la valeur de cette composante horizontale au troisième point.

Gauss a fait l'application de cette formule au triangle formé par Gœttingue, Milan et Paris. Prenant pour inconnue la valeur de H à Paris, il trouva

$$H = 0,51696,$$

tandis que l'observation directe donnait

$$H = 0,51804.$$

Une concordance aussi précise démontre l'utilité de la formule que nous venons d'établir. Elle permettra de déterminer la valeur de H à une station où un observateur aura déterminé seulement la déclinaison.

Soit M un point situé à la surface de la terre, ou extérieur à la sphère terrestre. Désignons par r la distance de ce point au centre de la terre; par λ sa *colatitude,* comptée positivement dans l'hémisphère nord; par $\mathfrak{L}$ sa *longitude occidentale.* Les trois coordonnées r, $\mathfrak{L}$, λ fixent sa position. La fonction potentielle magnétique en ce point est une fonction $\mathcal{V}(r, \mathfrak{L}, \lambda)$ de ces trois variables.

L'action magnétique au point M peut se décomposer en trois directions rectangulaires : la première composante Z est supposée dirigée vers le centre de la terre; la seconde Y est horizontale, située dans le méridien du point M et dirigée vers le nord. La troisième X est perpendiculaire aux deux précédentes et dirigée vers l'ouest.

Nous aurons alors

$$(4)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{1}{r\sin\lambda}\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\mathfrak{L}}, \\ Y = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\lambda}, \\ Z = \dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r}. \end{cases}$$

Ces trois égalités s'appliquent, en particulier, au cas où le point M est situé à la surface de la terre. Il suffit, dans ce cas, de donner à r la valeur R du rayon terrestre. Dans ce cas, X et Y seront les composantes de la projection H sur le plan horizontal de l'action magnétique terrestre, en sorte que nous aurons

$$(4')\qquad H = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La déclinaison, supposée horizontale, sera donnée par la formule

$$(4'')\qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{Y}{X}.$$

Enfin l'inclinaison sera donnée par la formule

$$(4''')\qquad \operatorname{tang} i = \frac{Z}{H}.$$

On peut donc, si l'on connaît l'expression de $\mathfrak{V}$ en fonction de r, λ et $\mathfrak{L}$, calculer les éléments du magnétisme terrestre en un point quelconque. Nous avons vu (Chap. V, § 2) comment on peut déterminer $\mathfrak{V}$. Nous allons d'abord indiquer quelques conséquences intéressantes des formules que nous venons d'établir :

1° Supposons que l'on connaisse l'expression de Y en tous les points de la surface terrestre, ou, en d'autres termes, que l'on sache exprimer Y en fonction de $\mathfrak{L}$ et λ. Prenons, sur un certain méridien, un point M correspondant à une certaine valeur de λ; formons la somme des quantités $Y\,d\lambda$ pour tous les points compris entre le pôle nord et le point M, et désignons cette somme par T :

$$T = \int_0^\lambda Y\,d\lambda.$$

T sera, comme Y, une fonction connue de $\mathfrak{L}$ et de λ.

Nous aurons

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = Y,$$

ou, en nous reportant à l'une des égalités (4),

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{1}{R} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \lambda}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(TR - \mathfrak{V}) = 0$$

ou

$$RT - \mathfrak{V} = \varphi(\mathfrak{L}).$$

Ceci a lieu en un point quelconque du méridien qui a pour longitude $\mathfrak{L}$. Faisons tendre ce point vers le pôle nord géographique; T tendra vers 0, $\mathfrak{V}$ vers la valeur $\mathfrak{V}_0$ du potentiel au pôle nord; $\varphi(\mathfrak{L})$ ne variera pas. Il en résulte que $\varphi(\mathfrak{L})$ est une quantité indépendante de $\mathfrak{L}$, constante et égale à $-\mathfrak{V}_0$.

La formule précédente nous donne alors

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 - RT.$$

D'autre part,

$$X = -\frac{1}{R \sin \lambda} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \mathfrak{L}} = \frac{1}{\sin \lambda} \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{L}}.$$

Reportons-nous à la définition de T, et nous trouverons

$$X = \frac{1}{\sin \lambda} \int_0^{\lambda} \frac{\partial Y}{\partial \mathfrak{L}} d\lambda. \tag{5}$$

D'où ce remarquable théorème de Gauss :

Si l'on connaît en tous les points du globe la composante horizontale dirigée vers le nord du magnétisme terrestre, on connaît aussi la composante horizontale dirigée vers l'ouest, et, par conséquent, la composante horizontale totale.

2° Supposons que X soit connu en tous les points du globe; X sera alors une fonction connue de λ et de $\mathfrak{L}$. Prenons sur un parallèle deux points M_0, M correspondant à des valeurs $\mathfrak{L}_0$ et $\mathfrak{L}_1$ de $\mathfrak{L}$ et posons

$$U = \int_{\mathfrak{L}_0}^{\mathfrak{L}} X \sin \lambda \, d\mathfrak{L};$$

U sera, comme X, une fonction connue de $\mathfrak{L}$ et λ. Nous aurons

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{L}} = X \sin\lambda$$

ou bien, en vertu de l'une des égalités (4),

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{L}} = -\frac{1}{R}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \mathfrak{L}}.$$

De là, nous déduisons

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{L}}(RU + \mathfrak{V}) = 0$$

ou bien

$$RU + \mathfrak{V} = f(\lambda).$$

D'autre part,

$$Y = \frac{1}{R}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \lambda}.$$

La formule précédente, différentiée par rapport à λ, peut donc s'écrire

$$R\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} + Y\right) = f'(\lambda),$$

ou, en se reportant à l'expression de U et en posant

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{R}f'(\lambda),$$

$$Y = -\int_{\mathfrak{L}_0}^{\mathfrak{L}} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{\sin\lambda}X\right) d\mathfrak{L} + \psi(\lambda).$$

La connaissance de X ne suffit donc pas à déterminer Y, puisque l'expression de Y renferme encore une fonction indéterminée de la colatitude. Mais, si l'on connaît la valeur de X en tous les points du globe, et la valeur de Y en tous les points d'une courbe passant par les deux pôles géographiques, la fonction $\psi(\lambda)$ sera connue, et la formule (6) déterminera la valeur de Y en tous les points du globe.

D'où le théorème suivant :

Si l'on connaît en tous les points du globe la valeur de la composante horizontale dirigée vers l'ouest du magnétisme

terrestre, et si l'on connaît, en outre, en tous les points d'une ligne passant par les deux pôles géographiques la valeur de la composante horizontale dirigée vers le nord, on peut déterminer en tous les points la valeur de cette dernière composante.

Ce théorème est encore dû à Gauss.



LIVRE VIII.

L'AIMANTATION PAR INFLUENCE SELON LA MÉTHODE DE POISSON.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE MAGNÉTIQUE.

§ 1. — Lois fondamentales de l'aimantation par influence.

Il existe des corps dont l'aimantation varie si lentement lorsque l'on modifie les conditions dans lesquelles ils se trouvent, que l'on est conduit à imaginer des corps dont le magnétisme serait absolument invariable. De semblables corps, dont les aimants réels s'approchent plus ou moins sans leur être absolument identiques, sont ce que nous nommerons des *aimants permanents*. Nous nommerons, au contraire, *corps parfaitement doux* ceux dont le magnétisme varie avec les circonstances. Le problème de l'*aimantation par influence* peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Un corps parfaitement doux étant placé en présence d'aimants permanents donnés, quelle sera la distribution permanente du magnétisme sur ce corps parfaitement doux ?

Cette distribution permanente porte le nom de *distribution d'équilibre*.

Poisson a cherché le premier à mettre en équation le problème

de l'aimantation par influence (¹); il s'appuyait sur les hypothèses suivantes :

Les phénomènes magnétiques doivent être expliqués par les propriétés de deux fluides, l'un positif ou austral, l'autre négatif ou boréal, qui agissent l'un sur l'autre comme agissent les fluides électriques.

Un corps parfaitement doux se compose de particules magnétiques extrêmement petites, séparées les unes des autres par des intervalles non magnétiques.

Chaque particule magnétique renferme des quantités égales des deux fluides, dont la distribution sur la particule est librement variable. Les fluides magnétiques ne peuvent se mouvoir au travers du milieu non magnétique qui sépare les particules.

Sur chaque particule, l'équilibre magnétique est établi lorsqu'une masse de fluide magnétique égale à l'unité, placée par la pensée en un point quelconque intérieur à cette particule, ne subit aucune action de la part des fluides magnétiques distribués soit sur cette particule, soit sur le reste du système.

Pour les corps isotropes, les particules magnétiques sont sphériques.

De ces hypothèses, par des raisonnements qui renferment plusieurs inexactitudes graves (²), Poisson est parvenu à déduire les conséquences suivantes :

Soient

(x, y, z) un point du corps parfaitement doux isotrope;
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation en ce point;
$\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique en ce point de tout le magnétisme répandu sur le système.

On a

$$(1) \qquad \mathcal{A} = -k\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \qquad \mathcal{B} = -k\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \qquad \mathcal{C} = -k\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z},$$

(¹) Poisson, *Mémoire sur la théorie du Magnétisme.* Lu à l'Académie des Sciences le 2 février 1824. — *Mémoires de l'Académie des Sciences,* années 1821 et 1822, t. V, p. 247-338.

(²) Nous renvoyons, pour la critique de la théorie de Poisson, à notre *Étude historique sur la théorie de l'aimantation par influence* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. II; 1888).

k étant un coefficient nommé *coefficient d'aimantation*, qui dépend exclusivement de la nature du corps parfaitement doux au point (x, y, z).

D'après la théorie de Poisson, *le coefficient k ne pouvait pas être négatif*. De plus, il ne pouvait surpasser une certaine limite.

Ces deux conditions, imposées au coefficient k, se heurtent à des difficultés expérimentales.

La valeur trouvée pour k en étudiant l'aimantation du fer doux surpasse la limite imposée à ce coefficient dans la théorie de Poisson.

Les propriétés des corps diamagnétiques, découvertes par Faraday en étudiant le bismuth, *semblent* exiger que le coefficient k ait, pour ces corps, une valeur négative.

Les difficultés, soit analytiques, soit expérimentales, que rencontre la théorie de Poisson ont conduit Sir W. Thomson (¹) à rejeter tout l'édifice d'hypothèses et de raisonnements pris par Poisson comme fondement des égalités (1), et à admettre purement et simplement ces équations à titre d'hypothèses. Sir W. Thomson n'impose au coefficient k aucune restriction. Il peut être positif, et le corps doux est dit alors *magnétique* ou *paramagnétique*, selon que le coefficient k est grand ou petit. Il peut être négatif, et le corps est dit alors *diamagnétique*.

Nous reviendrons, au Livre IX, sur les principes qui peuvent servir à établir les lois de l'aimantation par influence. Pour le moment, sans discuter l'exactitude des équations (1), nous allons en déduire une série de conséquences. On verra plus tard de quelle utilité nous seront les résultats obtenus.

§ 2. — Mise en équation du problème de l'aimantation par influence.

Poisson a montré comment, des équations (1), on pouvait déduire la mise en équation du problème de l'aimantation par influence, dans le cas où, le corps parfaitement doux étant *homogène*, k avait la même valeur en tous ses points.

(¹) W. THOMSON, *On the theory of magnetic induction in crystalline and non crystalline substances* (*Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. I, p. 177-186, 1851. — *Thomson's Reprint of papers on electrostatics and magnetism*, art. XXX).

Les équations (1) peuvent s'écrire sous une forme plus explicite. Soit $\mathfrak{U}$ la fonction potentielle magnétique du corps parfaitement doux. Soit $\mathfrak{W}$ la fonction potentielle magnétique des aimants permanents. Nous aurons

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U} + \mathfrak{W}$$

et les égalités (1) pourront s'écrire

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right), \\ \mathcal{B} = -k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y} + \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right), \\ \mathcal{C} = -k\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} + \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Les aimants permanents sont supposés entièrement définis. On peut donc regarder leur fonction potentielle magnétique $\mathfrak{W}$ comme connue. Les équations (2) nous montrent alors que, pour déterminer l'aimantation en chaque point du corps parfaitement doux, il suffit de déterminer la fonction $\mathfrak{U}$.

Voici la transformation fondamentale sur laquelle repose la détermination de cette fonction.

Différentions la première égalité (2) par rapport à x, la seconde par rapport à y et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z} = -k(\Delta\mathfrak{U} + \Delta\mathfrak{W}).$$

Mais, en premier lieu, tout point (x, y, z) du corps parfaitement doux étant extérieur aux aimants permanents, on a, en un tel point,

$$\Delta\mathfrak{W} = 0.$$

En second lieu, en tout point du corps doux, on a [Livre VII, Chap. III, égalité (8)]

$$(3)\qquad \Delta\mathfrak{U} = 4\pi\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right).$$

L'égalité précédente se réduit donc à

$$(4)\qquad (1 + 4\pi k)\Delta\mathfrak{U} = 0.$$

Si le corps est magnétique ou paramagnétique, k étant positif, il

en est de même de $(1 + 4\pi k)$. Pour les corps diamagnétiques, d'après la définition de Sir W. Thomson, k serait négatif; mais, pour tous les corps diamagnétiques connus, k aurait une valeur absolue fort petite, bien inférieure à $\frac{1}{4\pi}$. On n'exclura donc aucun corps connu, en se restreignant à l'étude des corps qui satisfont à la condition suivante :

La quantité $(1 + 4\pi k)$ *est positive.*

On voit alors que l'égalité (4) peut s'écrire

$$\Delta\mathcal{V} = 0, \tag{5}$$

ce qui transforme l'égalité (3) en

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

D'après la définition donnée au Livre VII, Chap. IV, § 1, cette dernière égalité équivaut au théorème suivant :

D'après la théorie de Poisson, l'aimantation d'un corps parfaitement doux homogène est toujours une aimantation solénoïdale.

D'après ce que nous avons vu au Livre VII, Chapitre VII, § 2, *cette distribution est aussi une distribution lamellaire simple.*

L'égalité (5) nous montre que *la fonction potentielle magnétique* $\mathcal{V}$ *du corps parfaitement doux est harmonique en tout point intérieur à ce corps.*

Considérons un point de la surface du corps parfaitement doux. Soit N_i la normale à la surface en ce point vers l'intérieur du corps parfaitement doux. Les égalités (2) nous donneront

$$\|\mathcal{A}\cos(N_i, x)\| = -k\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial N_i}\right).$$

Mais, d'autre part, on a [Livre VII, Chap. II, égalité (9)]

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e} = 4\pi\|\mathcal{A}\cos(N_i, x)\|.$$

On a donc, en tout point de la surface du corps parfaitement doux,

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e} + 4\pi k\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial N_i} = 0; \tag{7}$$

$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N_i}$ pouvant être regardé comme une quantité connue, cette égalité (7) constitue une relation entre $\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_i}$ et $\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_e}$.

La fonction cherchée $\mathfrak{V}(x, y, z)$ est, d'après ce qui précède, assujettie aux conditions suivantes :

1° Elle est continue dans tout l'espace;

2° Elle est harmonique tant à l'extérieur qu'à l'intérieur du corps parfaitement doux;

3° Elle se comporte à l'infini comme une fonction potentielle;

4° En tout point de la surface du corps parfaitement doux, ses dérivées partielles du premier ordre vérifient l'égalité (7).

Ces conditions suffisent-elles à déterminer la fonction $\mathfrak{V}$? Il est aisé de voir que deux fonctions distinctes $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$ ne sauraient vérifier à la fois toutes ces conditions.

Supposons, en effet, que deux fonctions distinctes $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$ vérifient à la fois ces conditions, et posons

$$\Theta = \mathfrak{V}' - \mathfrak{V}.$$

La fonction Θ serait, comme les fonctions $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$, harmonique tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du corps parfaitement doux. Si donc nous désignons par dv_i un élément de volume intérieur au corps parfaitement doux et par dv_e un élément de volume extérieur au même corps, nous aurons

$$\int \Delta\Theta \, dv_e + (1 + 4\pi k) \int \Delta\Theta \, dv_i = 0. \tag{8}$$

Mais le théorème de Green nous donne, en désignant par S la surface du corps parfaitement doux,

$$\int \Delta\Theta \, dv_e = -\mathbf{S} \frac{\partial \Theta}{\partial N_e} dS - \int \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2 \right] dv_e,$$

$$\int \Delta\Theta \, dv_i = -\mathbf{S} \frac{\partial \Theta}{\partial N_i} dS - \int \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2 \right] dv_i.$$

D'autre part, les égalités

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_e} + 4\pi k \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N_i} = 0,$$

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial N_e} + 4\pi k \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N_i} = 0$$

montrent que l'on a, en tout point de la surface S,

$$(1+4\pi k)\frac{\partial\Theta}{\partial N_i}+\frac{\partial\Theta}{\partial N_e}=0.$$

L'égalité (8) devient donc

$$\int\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right]dv_e$$
$$+(1+4\pi k)\int\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right]dv_i=0.$$

La quantité $(1+4\pi k)$ est positive. Les quantités $\frac{\partial\Theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\Theta}{\partial y}$, $\frac{\partial\Theta}{\partial z}$ sont continues en tout point, tant extérieur qu'intérieur au corps parfaitement doux. L'égalité précédente exige donc que l'on ait, en tout point tant extérieur qu'intérieur au corps parfaitement doux,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z}=0.$$

Si l'on ajoute que, comme les fonctions $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$, Θ doit être continu dans tout l'espace et égal à zéro à l'infini, on voit que l'on aura dans tout l'espace

$$\Theta=0$$

ou

$$\mathfrak{V}=\mathfrak{V}'.$$

La proposition énoncée est donc démontrée.

Nous voyons ainsi que les conditions précédemment indiquées suffisent à déterminer complètement la solution du problème de l'aimantation par influence, l'existence de cette solution étant admise. Le problème dont il s'agit admet-il toujours une solution? C'est une question que nous réserverons pour le moment; nous aurons occasion de l'examiner au Livre IX sous une forme plus générale.

3. — Autre manière de mettre en équation le problème de l'aimantation par influence.

La mise en équation du problème de l'aimantation, telle que nous venons de l'indiquer, est due à G. Kirchhoff(1).

(1) G. Kirchhoff, *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen*, § 2 (*Crelle's Journal*, Bd. XLVIII; 1853. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 193).

La forme sous laquelle Poisson (¹) a mis en équation le problème de l'aimantation par influence, forme dont ont fait usage non seulement Poisson, mais encore F.-E. Neumann, Lipschitz, Beer et Carl Neumann, diffère légèrement de la forme précédente. Nous allons l'indiquer ici.

Soit $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de tout le système, donnée par l'égalité

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}.$$

Posons

$$\varphi = -\mathcal{V} \text{ (²)}.$$

Nous aurons alors, au lieu des égalités (1), les égalités

$$(9) \qquad \mathcal{A} = k\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mathcal{B} = k\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \mathcal{C} = k\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

qui nous montrent que l'aimantation du corps parfaitement doux est déterminée lorsqu'on connaît la fonction φ.

Or la fonction φ est définie par l'égalité

$$(10) \qquad \varphi + \mathcal{U} + \mathcal{W} = 0,$$

dans laquelle figurent la fonction connue $\mathcal{W}$ et la fonction inconnue $\mathcal{U}$. Mais celle-ci est liée à la fonction φ par une relation très simple.

On sait, en effet, que l'on a, en général [Livre VII, Chap. III, égalité (3)],

$$\mathcal{U}(x, y, z) = -\mathbf{S} \| \mathcal{A}\cos(N_i, x) \| \frac{dS}{r} - \int \left\| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \xi} \right\| \frac{1}{r}\, dv,$$

la première sommation s'étendant à tous les éléments de la surface du corps parfaitement doux, et la seconde à tous les éléments du volume de ce corps.

Dans le cas actuel, en vertu de l'égalité (6), cette égalité se réduit à

$$\mathcal{U}(x, y, z) = -\mathbf{S} \| \mathcal{A}\cos(N_i, x) \| \frac{dS}{r}.$$

(¹) Poisson, *Mémoire sur la théorie du magnétisme*, § 2, n° 20 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1821 et 1822, t. V, p. 247).

(²) On pourrait aussi bien chercher à déterminer la fonction $\mathcal{V}$ ou la fonction $\mathcal{U}$ que la fonction φ. Nous n'avons choisi cette dernière que pour conformer nos formules à celles employées par d'autres auteurs, notamment par F.-E. Neumann (*Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induction*; Leipzig, 1881).

En vertu des égalités (9), cette dernière égalité prend la forme

$$(11) \qquad \mathfrak{V} = -k \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \frac{dS}{r}.$$

La comparaison des égalités (10) et (11) montre que la fonction φ vérifie la relation

$$(12) \qquad \mathfrak{W} + \varphi - k \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \frac{dS}{r} = 0.$$

Or nous allons prouver qu'il ne peut exister plus d'une fonction φ vérifiant cette égalité (12), en sorte que cette égalité peut servir à la détermination de la distribution du magnétisme induit sur le corps parfaitement doux.

Supposons que deux fonctions distinctes, φ et φ', vérifient l'égalité (12), et posons

$$\psi = \varphi' - \varphi.$$

Nous aurons évidemment

$$\psi - k \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial \psi}{\partial N_i} \frac{dS}{r} = 0.$$

Cette égalité nous montre que ψ pourrait être regardé comme la fonction potentielle ordinaire d'une couche électrique distribuée sur la surface du corps doux avec une densité superficielle

$$k \frac{\partial \psi}{\partial N_i}.$$

La fonction ψ serait donc harmonique tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du corps doux; elle serait continue dans tout l'espace; elle se comporterait à l'infini comme une fonction potentielle; enfin, à la surface du corps doux, ses dérivées partielles du premier ordre vérifieraient l'égalité

$$\frac{\partial \psi}{\partial N_i} + \frac{\partial \psi}{\partial N_e} = -4\pi k \frac{\partial \psi}{\partial N_i}$$

ou

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial \psi}{\partial N_i} + \frac{\partial \psi}{\partial N_e} = 0.$$

Ces conditions, auxquelles serait assujettie la fonction ψ sont celles auxquelles était assujettie la fonction Θ considérée au paragraphe précédent. La démonstration indiquée au paragraphe pré-

cédent prouve alors que l'on a dans tout l'espace

$$\psi = 0$$

ou

$$\varphi = \varphi'.$$

C'est ce que nous nous proposions de démontrer.

On cherchera donc à déterminer, pour tout point intérieur au corps parfaitement doux, une fonction φ vérifiant, en chacun de ces points, l'égalité (12). Cette fonction sera unique. Une fois cette fonction déterminée, l'égalité (12) permettra immédiatement de calculer la valeur de cette fonction à l'extérieur du corps parfaitement doux.

§ 4. — La fonction caractéristique.

Nous avons vu (Livre II, Chap. VI) que le problème de la distribution électrique était susceptible d'une très remarquable transformation. On peut regarder ce problème comme résolu lorsqu'on sait déterminer une certaine *fonction de Green,* qui dépend exclusivement de la forme du conducteur étudié et non des influences auxquelles il est soumis.

M. F.-E. Neumann [1] a montré que le problème de l'aimantation par influence était susceptible d'une transformation analogue. La solution de ce problème peut être regardée comme obtenue lorsqu'on sait former une certaine fonction dépendant uniquement de la forme du corps parfaitement doux. Cette fonction, analogue à la fonction de Green, a reçu de F.-E. Neumann le nom de *fonction caractéristique.*

Soient M un point quelconque de l'espace; φ (M), $\mathfrak{V}$ (M), les valeurs de φ et de $\mathfrak{V}$ en ce point. Soit m un point de l'élément dS. L'égalité (12) pourra s'écrire plus explicitement

$$(12\,bis) \qquad \mathfrak{V}(\mathrm{M}) + \varphi(\mathrm{M}) - k \int \frac{\partial \varphi(m)}{\partial \mathrm{N}_i} \frac{1}{\overline{\mathrm{M}m}} d\mathrm{S} = 0.$$

Prenons un point M infiniment voisin de la normale ν_i passant par un point P de la surface S. Supposons que ce point se déplace

(1) F.-E. Neumann, *Vorlesungen über Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion*, p. 110; Leipzig, 1881.

infiniment peu sur cette normale, vers l'intérieur du corps doux, d'une longueur $d\nu_i$. Écrivons la nouvelle égalité analogue à l'égalité (12 *bis*), et retranchons ces deux égalités l'une de l'autre. Nous trouverons

$$\frac{\partial \mathfrak{V}(M)}{\partial\nu_i} + \frac{\partial \varphi(M)}{\partial\nu_i} - k \, \mathrm{S} \, \frac{\partial \varphi(m)}{\partial N_i} \frac{\partial}{\partial\nu_i}\left(\frac{1}{\overline{Mm}}\right) dS = 0.$$

Faisons tendre le point M vers le point P et nous trouverons à la limite

$$(13) \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}(P)}{\partial\nu_i} + \frac{\partial \varphi(P)}{\partial\nu_i} - k \, \mathrm{S} \, \frac{\partial \varphi(m)}{\partial N_i} \frac{\partial}{\partial\nu_i}\left(\frac{1}{\overline{Pm}}\right) dS = 0.$$

Toute égalité de la forme (12 *bis*) détermine une seule fonction $\varphi(M)$ lorsqu'on y remplace $\mathfrak{V}(M)$ par une certaine fonction potentielle.

Prenons pour $\mathfrak{V}(M)$ la fonction potentielle d'une masse égale à l'unité placée au point P, c'est-à-dire la quantité $\frac{1}{\overline{PM}}$. Soit $G(M, P)$ la fonction $\varphi(M)$ correspondante, fonction déterminée par l'égalité

$$(14) \qquad \frac{1}{\overline{PM}} + G(M, P) - k \, \mathrm{S} \, \frac{\partial G(m, P)}{\partial N_i} \frac{1}{\overline{Mm}} dS = 0.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (14) par $\frac{\partial \mathfrak{V}(P)}{\partial\nu_i}$. Multiplions les deux membres de l'égalité (13) par $\frac{1}{\overline{PM}}$. Retranchons membre à membre les égalités obtenues. Nous aurons

$$\begin{aligned} & G(M, P) \frac{\partial \mathfrak{V}(P)}{\partial\nu_i} - \frac{1}{\overline{PM}} \frac{\partial \varphi(P)}{\partial\nu_i} \\ & - k \, \mathrm{S} \left[\frac{\partial G(m, P)}{\partial N_i} \frac{\partial \mathfrak{V}(P)}{\partial\nu_i} \frac{1}{\overline{Mm}} - \frac{\partial \varphi(m)}{\partial\nu_i} \frac{\partial}{\partial\nu_i}\left(\frac{1}{\overline{mP}}\right) \frac{1}{\overline{MP}} \right] dS = 0. \end{aligned}$$

Soit $d\sigma$ un élément de la surface S entourant le point P. Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par $d\sigma$ et intégrons pour tous les éléments $d\sigma$ de la surface S. Nous aurons

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{S} \left[G(M, P) \frac{\partial \mathfrak{V}(P)}{\partial\nu_i} - \frac{1}{\overline{PM}} \frac{\partial \varphi(P)}{\partial\nu_i} \right] d\sigma \\ & - k \, \mathrm{SS} \left[\frac{\partial G(m, P)}{\partial N_i} \frac{\partial \mathfrak{V}(P)}{\partial\nu_i} \frac{1}{\overline{Mm}} - \frac{\partial \varphi(m)}{\partial N_i} \frac{\partial}{\partial\nu_i}\left(\frac{1}{\overline{mP}}\right) \frac{1}{\overline{MP}} \right] dS \, d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais on a évidemment

$$\mathbf{SS}\frac{\partial\varphi(m)}{\partial N_i}\frac{\partial}{\partial\nu_i}\left(\frac{1}{\overline{mP}}\right)\frac{1}{\overline{MP}}\,dS\,d\sigma = \mathbf{SS}\frac{\partial\varphi(P)}{\partial\nu_i}\frac{\partial}{\partial N_i}\left(\frac{1}{\overline{mP}}\right)\frac{1}{\overline{Mm}}\,dS\,d\sigma.$$

L'égalité (15) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}\left[G(M,P)\frac{\partial\wp(P)}{\partial\nu_i}-\frac{1}{\overline{PM}}\frac{\partial\varphi(P)}{\partial\nu_i}\right]d\sigma\\ &\quad -k\,\mathbf{S}\frac{dS}{\overline{Mm}}\frac{\partial}{\partial N_i}\mathbf{S}\left[G(m,P)\frac{\partial\wp(P)}{\partial\nu_i}-\frac{1}{\overline{Pm}}\frac{\partial\varphi(P)}{\partial\nu_i}\right]d\sigma = 0,\end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$f(M) = \mathbf{S}\left[G(M,P)\frac{\partial\wp(P)}{\partial\nu_i}-\frac{1}{\overline{PM}}\frac{\partial\varphi(P)}{\partial\nu_i}\right]d\sigma,$$

$$f(M) - k\,\mathbf{S}\frac{\partial f(m)}{\partial N_i}\frac{1}{\overline{Mm}}\,dS = 0.$$

Or nous avons étudié au paragraphe précédent une semblable égalité. Nous avons vu qu'elle entraînait, dans tout l'espace, l'égalité

$$f(M) = 0.$$

Nous avons donc

$$\mathbf{S}\left[G(M,P)\frac{\partial\wp(P)}{\partial\nu_i}-\frac{1}{\overline{PM}}\frac{\partial\varphi(P)}{\partial\nu_i}\right]d\sigma = 0,$$

quel que soit le point M.

On déduit de là, en remplaçant simplement les symboles P, ν_i, $d\sigma$ par les symboles m, N_i, dS,

$$\mathbf{S}\left[G(M,m)\frac{\partial\wp(m)}{\partial N_i}-\frac{1}{\overline{Mm}}\frac{\partial\varphi(m)}{\partial N_i}\right]dS = 0,$$

égalité qui, jointe à l'égalité (12 *bis*), permet d'écrire

$$\wp(M)+\varphi(M)-k\,\mathbf{S}\,G(M,m)\frac{\partial\wp(m)}{\partial N_i}\,dS = 0.$$

Cette dernière égalité montre que, si l'on connaît la fonction $G(M, m)$ pour tous les points m de la surface du corps parfaitement doux et pour tous les points M de l'espace, on sait immédiatement déterminer la fonction φ, et partant la distribution

magnétique sur un corps soumis à une influence quelconque, définie par la fonction $\mathfrak{P}(M)$.

On sait donc déterminer la distribution magnétique engendrée sur un corps parfaitement doux par des aimants quelconques lorsque l'on sait déterminer la distribution magnétique induite sur ce corps par une masse magnétique égale à l'unité placée en un point quelconque de sa surface.

CHAPITRE II.

CORPS QUI S'AIMANTENT UNIFORMÉMENT DANS UN CHAMP UNIFORME.

§ 1. — Aimantation d'une sphère pleine dans un champ magnétique uniforme.

Nous allons appliquer les considérations générales données au Chapitre précédent à l'étude de quelques cas particuliers du problème de l'aimantation par influence.

Nous commencerons par étudier l'aimantation que prend une sphère magnétique pleine et homogène placée dans un champ uniforme [1].

Pour déterminer cette aimantation, nous commencerons par examiner les propriétés d'une sphère uniformément aimantée.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation de cette sphère et dv un élément de volume, de coordonnées (ξ, η, ζ), appartenant à cette sphère. En un point quelconque (x, y, z), la fonction potentielle de cette sphère a pour valeur

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right\| dv,$$

ce qui peut s'écrire, puisque la sphère est uniformément aimantée et que l'on a d'ailleurs

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

$$(1) \qquad \mathcal{V}(x, y, z) = -\mathcal{A} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dv - \mathcal{B} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dv - \mathcal{C} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dv.$$

(1) Poisson, *Mémoire sur la théorie du magnétisme*, § III (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1821 et 1822, t. V, p. 247).

Supposons la sphère uniformément remplie d'électricité dont la densité serait égale à 1. Elle aurait pour fonction potentielle ordinaire la quantité

$$V(x, y, z) = \int \frac{1}{x} dv,$$

et l'égalité (1) pourrait s'écrire

$$(2) \qquad \mathcal{V}(x, y, z) = -\mathcal{A}\frac{\partial V}{\partial x} - \mathcal{B}\frac{\partial V}{\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Cette expression de la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ est exacte, non seulement pour une sphère uniformément aimantée, mais encore pour tout corps uniformément aimanté, quelle qu'en soit la forme.

Introduisons maintenant l'hypothèse que le corps auquel nous avons affaire est une sphère. Prenons le centre de cette sphère pour origine des coordonnées et désignons par R son rayon.

Si le point (x, y, z) est extérieur à la sphère, nous aurons

$$V(x, y, z) = \frac{4}{3}\,\frac{\pi R^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}\,\frac{\pi R^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,x,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4}{3}\,\frac{\pi R^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,y,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4}{3}\,\frac{\pi R^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,z$$

et, par conséquent, d'après la formule (2),

$$(3) \qquad \mathcal{V}(x, y, z) = \frac{4}{3}\,\frac{\pi R^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}z).$$

Cette formule nous montre qu'*une sphère uniformément aimantée exerce en tout point extérieur la même action qu'un élément magnétique placé en son centre, ayant pour direction d'axe la direction de l'aimantation et dont le moment magnétique aurait pour composantes*

$$(4) \qquad A = \frac{4}{3}\pi R^3\mathcal{A}, \qquad B = \frac{4}{3}\pi R^3\mathcal{B}, \qquad C = \frac{4}{3}\pi R^3\mathcal{C}.$$

Si le point (x, y, z) est intérieur à la sphère, nous aurons

$$V(x, y, z) = -\frac{2}{3}\pi(x^2+y^2+z^2) + 2\pi R^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi x, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4}{3}\pi y, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi z$$

et, par conséquent, d'après la formule (2),

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \frac{4}{3}\pi(\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}z). \tag{5}$$

Cette formule va nous permettre de résoudre le problème de l'aimantation prise par une sphère magnétique homogène dans un champ uniforme.

La fonction potentielle magnétique $\mathcal{W}(x, y, z)$ d'un champ uniforme est une fonction linéaire des coordonnées; soit

$$\mathcal{W}(x, y, z) = -(Fx + Gy + Hz + K); \tag{6}$$

F, G, H seront les composantes de l'action magnétique en un point quelconque du champ.

Imaginons que nous communiquions à la sphère une aimantation uniforme ayant pour composantes

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{k}{1+\frac{4}{3}\pi k}\,F, \\ \mathcal{B} &= \frac{k}{1+\frac{4}{3}\pi k}\,G, \\ \mathcal{C} &= \frac{k}{1+\frac{4}{3}\pi k}\,H. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Nous aurions alors, d'après les égalités (5), (6) et (7),

$$\mathcal{A} = -k\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{V} + \mathcal{W}),$$

$$\mathcal{B} = -k\frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{V} + \mathcal{W}),$$

$$\mathcal{C} = -k\frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{V} + \mathcal{W}).$$

Or, d'après ce que nous avons démontré au Chapitre précédent,

ces dernières équations déterminent sans ambiguïté l'aimantation prise par une sphère dont le coefficient d'aimantation est k dans un champ dont la fonction potentielle magnétique est $\mathfrak{P}$. Cette aimantation est donc donnée par les égalités (7).

Ainsi, *dans un champ uniforme, une sphère magnétique pleine s'aimante uniformément. L'aimantation a la même direction que l'action du champ et est proportionnelle à l'intensité du champ.*

D'après l'égalité (3), la fonction potentielle magnétique d'une sphère placée dans un champ magnétique uniforme a pour expression, à l'extérieur de cette sphère,

$$(8) \qquad \mho(x, y, z) = \frac{\frac{4}{3}\pi k}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \frac{R^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (Fx + Gy + Hz).$$

§ 2. — **Aimantation d'un ellipsoïde plein dans un champ magnétique uniforme.**

La méthode précédente s'applique également à l'étude de l'aimantation prise par un ellipsoïde homogène dans un champ magnétique uniforme ([1]).

Soit $V(x, y, z)$ la fonction potentielle ordinaire de l'ellipsoïde uniformément rempli d'électricité avec la densité 1. Prenons pour origine le centre de l'ellipsoïde et, pour axes de coordonnées, les axes de l'ellipsoïde. D'après ce que nous avons vu en étudiant l'attraction des ellipsoïdes, on a [Livre I, Chap. VI, égalités (15)]

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2Lx,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2My,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2Nz,$$

L, M, N étant [Livre I, Chap. VI, égalités (13)] trois constantes λ,

([1]) Poisson, *Second Mémoire sur la théorie du magnétisme*, § I (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1821 et 1822, t. V, p. 488).

μ, ν pour les points intérieurs à l'ellipsoïde et trois fonctions de x, y, z pour les points extérieurs.

L'égalité (2) devient alors

$$\mathcal{V}(x, y, z) = 2(\mathcal{A}Lx + \mathcal{B}My + \mathcal{C}Nz). \tag{9}$$

De cette égalité, on déduit, pour les points intérieurs à l'ellipsoïde,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = 2\mathcal{A}\lambda, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 2\mathcal{B}\mu, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = 2\mathcal{C}\nu. \tag{10}$$

Ces résultats acquis, plaçons un ellipsoïde homogène dans un champ magnétique uniforme, défini par l'égalité (6). Communiquons à cet ellipsoïde une aimantation uniforme ayant pour composantes

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{k}{1+2k\lambda}F, \\ \mathcal{B} &= \frac{k}{1+2k\mu}G, \\ \mathcal{C} &= \frac{k}{1+2k\nu}H. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Il est facile de voir, d'après les égalités (6) et (10), que cette aimantation vérifiera les égalités

$$\mathcal{A} = -k\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{V} + \mathcal{W}),$$

$$\mathcal{B} = -k\frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{V} + \mathcal{W}),$$

$$\mathcal{C} = -k\frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{V} + \mathcal{W})$$

et représentera, par conséquent, la distribution magnétique d'équilibre prise par l'ellipsoïde.

Ainsi, *un ellipsoïde homogène, placé dans un champ magnétique uniforme, s'aimante uniformément; mais, en général, la direction de l'aimantation ne coïncide pas avec la direction des lignes de force du champ.*

Les égalités (9) et (11) donnent l'expression suivante de la fonction potentielle magnétique d'un ellipsoïde homogène placé dans

un champ magnétique uniforme

$$(12) \qquad \mho(x,y,z) = \frac{2kL}{1+k\lambda}Fx + \frac{2kM}{1+k\mu}Gy + \frac{2kN}{1+k\nu}Hz.$$

§ 3. — Détermination des coefficients d'aimantation.

Poisson [1], à qui l'on doit la solution des problèmes précédents, a montré comment les résultats obtenus pouvaient conduire à la détermination de la constante k.

Supposons que l'on place une sphère homogène faite avec la substance dont on veut déterminer le coefficient d'aimantation dans un champ magnétique uniforme connu avec précision, par exemple, dans le champ magnétique terrestre. Cette sphère s'aimantera suivant les lois indiquées au § 1.

Prenons pour axe des x la méridienne magnétique dirigée vers le nord, pour axe des y une droite horizontale, normale à la précédente et dirigée vers l'est, pour axe des z une verticale dirigée vers le zénith. Soit T la force magnétique terrestre; soit i l'inclinaison. Nous aurons

$$(13) \qquad \begin{cases} F = T\cos i, \\ G = 0, \\ H = -T\sin i. \end{cases}$$

Soit R le rayon de la sphère dont le centre est supposé placé à l'origine des coordonnées; soit (x, y, z) un point extérieur à la sphère. Posons

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

D'après l'égalité (8), la fonction potentielle magnétique de la sphère au point (x, y, z) aura pour valeur

$$\mho(x,y,z) = \frac{\frac{4}{3}\pi k}{1+\frac{4}{3}\pi k}\frac{R^3}{r^3}T(x\cos i - z\sin i).$$

Cette sphère exercera, sur un pôle magnétique égal à l'unité

---

[1] Poisson, *Mémoire sur la théorie du magnétisme*, § III (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. V, p. 247; années 1821 et 1822).

placé au point (x, y, z) une action dont les composantes seront

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Xi &= \frac{\frac{4}{3}\pi k}{1+\frac{4}{3}\pi k}\,\mathrm{R}^3\mathrm{T}\left[\frac{\cos i}{r^3} - \frac{3(x\cos i - z\sin i)x}{r^5}\right],\\
\mathrm{H} &= \frac{\frac{4}{3}\pi k}{1+\frac{4}{3}\pi k}\,\mathrm{R}^3\mathrm{T}\left[-\frac{3(x\cos i - z\sin i)y}{r^5}\right],\\
\mathrm{Z} &= \frac{\frac{4}{3}\pi k}{1+\frac{4}{3}\pi k}\,\mathrm{R}^3\mathrm{T}\left[-\frac{\sin i}{r^3} - \frac{8(x\cos i - z\sin i)z}{r^5}\right].
\end{aligned}\right.$$

Un pôle magnétique égal à l'unité placé au point (x, y, z) subira une action totale dont les composantes seront

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \mathrm{F} + \Xi,\\
\mathrm{Y} &= \mathrm{G} + \mathrm{H},\\
\mathrm{Z} &= \mathrm{H} + \mathrm{Z}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules nous font aisément connaître la direction que prendra une petite aiguille aimantée placée au point (x, y, z). Si, par exemple, cette aiguille est mobile autour d'un axe vertical, son axe magnétique s'orientera de manière à faire avec la direction de l'axe des x un angle υ, compté positivement vers l'orient, et l'on aura

$$\operatorname{tang}\upsilon = \frac{\mathrm{G}+\mathrm{H}}{\mathrm{F}+\Xi},$$

ou bien, en vertu des égalités (13), (14) et (15),

$$(16)\qquad \operatorname{tang}\upsilon = \frac{3\mu\,\dfrac{(x\cos i - z\sin i)y}{r^2}}{\cos i(1-\mu) + 3\mu\,\dfrac{(x\cos i - z\sin i)x}{r^2}}$$

avec

$$(16\ bis)\qquad \mu = \frac{\frac{4}{3}\pi k}{1+\frac{4}{3}\pi k}\,\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}.$$

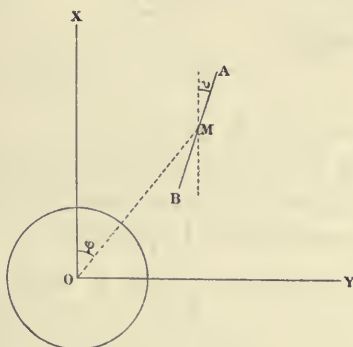
Supposons l'aiguille mobile dans le plan horizontal qui renferme le centre de la sphère. Nous aurons alors $z = 0$, et la for-

mule (16) prendra la forme beaucoup plus simple

$$\operatorname{tang} \upsilon = \frac{3\mu \dfrac{xy}{r^2}}{1 - \mu + 3\mu \dfrac{x^2}{r^2}}.$$

Soit φ l'angle que fait avec l'axe des x la direction OM (*fig.* 17)

Fig. 17.



joignant le centre de la sphère au milieu de l'aiguille BA. Nous aurons

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

et la formule précédente deviendra

(17) $$\operatorname{tang} \upsilon = \frac{3\mu \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \mu)\left(1 + \dfrac{3\mu}{1 - \mu} \cos^2 \varphi\right)}.$$

D'après cette formule, l'angle υ est égal à o lorsque la ligne qui joint le centre de la sphère au milieu de l'aiguille est parallèle ou perpendiculaire au méridien magnétique. L'angle υ passe par un maximum au moment où l'angle φ prend une valeur déterminée par l'égalité

(18) $$\cot^2 \varphi = \frac{1 - \mu}{1 + 2\mu}.$$

La quantité μ, définie par l'égalité (16 *bis*), est positive et inférieure à $\frac{R^3}{r^3}$. Si la distance r est très grande par rapport à R, μ de-

vient très petit; l'égalité (18) se réduit à

$$\cot^2\varphi = 1,$$

et le maximum de υ a lieu sensiblement au moment où la ligne OM est bissectrice de l'angle XOY.

Pour déterminer la constante k, on observe la valeur de υ qui correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$. On a alors

$$(19) \qquad \tan\upsilon = \frac{\frac{3}{2}\mu}{(1-\mu)\left(1+\frac{3}{2}\frac{\mu}{1-\mu}\right)}.$$

Cette égalité permettra de déterminer μ, et, partant, d'après l'égalité (16 *bis*), le coefficient d'aimantation k. Les expériences faites par divers expérimentateurs sur diverses espèces de fer doux ont donné pour valeur de la quantité

$$\frac{\frac{4}{3}\pi k}{1+\frac{4}{3}\pi k}$$

un nombre un peu inférieur à l'unité.

§ 4. — Détermination de l'inclinaison par la mesure de déviations horizontales.

La formule (16) fournit un moyen de déterminer l'inclinaison magnétique en observant l'angle dont une aiguille, mobile autour d'un axe vertical, est déviée du méridien magnétique par une sphère qu'aimante le champ magnétique terrestre. La formule (16) peut s'écrire

$$\tan\upsilon = \frac{\frac{3\mu}{1-\mu}\,\frac{(x\cos i - z\sin i)y}{r^2\cos i}}{1+\frac{3\mu}{1-\mu}\,\frac{(x\cos i - z\sin i)x}{r^2\cos i}}$$

ou bien

$$\frac{\tan\upsilon}{y - x\tan\upsilon} = \frac{3\mu}{1-\mu}\,\frac{x\cos i - z\sin i}{r^2\cos i}.$$

On observe la valeur de l'angle υ pour deux positions de l'aiguille, symétriques par rapport au plan horizontal contenant le

centre de la sphère. Si la première valeur observée, υ, est donnée par la formule précédente, la seconde, ϖ, sera donnée par la formule

$$\frac{\operatorname{tang}\varpi}{y - x\operatorname{tang}\varpi} = \frac{3\mu}{1-\mu}\,\frac{x\cos i + z\sin i}{r^2\cos i}.$$

Les deux formules que nous venons d'obtenir donnent

$$\frac{\operatorname{tang}\upsilon}{y - x\operatorname{tang}\upsilon} + \frac{\operatorname{tang}\varpi}{y - x\operatorname{tang}\varpi} = \frac{6\mu}{1-\mu}\,\frac{x}{r^2},$$

$$\frac{\operatorname{tang}\upsilon}{y - x\operatorname{tang}\upsilon} - \frac{\operatorname{tang}\varpi}{y - x\operatorname{tang}\varpi} = -\frac{6\mu}{1-\mu}\,\frac{z}{r^2}\operatorname{tang} i.$$

On déduit de là

$$(20)\qquad \operatorname{tang} i = \frac{\dfrac{\operatorname{tang}\varpi}{y - x\operatorname{tang}\varpi} - \dfrac{\operatorname{tang}\upsilon}{y - x\operatorname{tang}\upsilon}}{\dfrac{\operatorname{tang}\varpi}{y - x\operatorname{tang}\varpi} + \dfrac{\operatorname{tang}\upsilon}{y - x\operatorname{tang}\upsilon}}\,\frac{x}{z}.$$

Cette formule permettra de déterminer l'inclinaison magnétique en observant seulement les déviations d'une aiguille mobile autour d'un axe vertical. Nous nous contentons d'indiquer ici le principe de cette ingénieuse méthode, que l'on peut compléter de manière à tenir compte de la longueur de l'aiguille et de l'aimantation induite dans la sphère sous l'influence de cette aiguille (¹).

(¹) F.-E. Neumann, *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus*, § 20; Leipzig, 1881.

CHAPITRE III.

SPHÈRE CREUSE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME.

§ 1. — Aimantation d'une sphère creuse dans un champ magnétique uniforme.

Les deux exemples que nous avons examinés au Chapitre précédent ont été traités directement en prenant pour point de départ les équations qui lient les composantes de l'aimantation en un point d'un corps parfaitement doux aux dérivées partielles de la fonction potentielle magnétique. Une méthode aussi directe ne s'applique qu'aux corps qui prennent, dans un champ uniforme, une aimantation uniforme; les seuls corps connus qui possèdent cette propriété sont la sphère pleine et l'ellipsoïde plein.

Dans tous les autres cas, il sera nécessaire de prendre pour point de départ les méthodes analytiques que nous avons indiquées au Chapitre I. Nous allons donner un exemple d'application de ces méthodes, en traitant l'aimantation prise dans un champ uniforme par une masse de fer doux comprise entre deux sphères concentriques. Cette aimantation a été déterminée par Poisson [1].

D'après l'égalité (12) du Chapitre I, le problème se ramène à la recherche d'une fonction φ uniforme, finie, continue dans tout l'espace et vérifiant, en tout point du corps aimanté, l'égalité

$$\mathfrak{P} + \varphi - k \int \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \frac{1}{r} \, dS = 0, \tag{1}$$

dans laquelle $\mathfrak{P}$ représente la fonction potentielle magnétique des

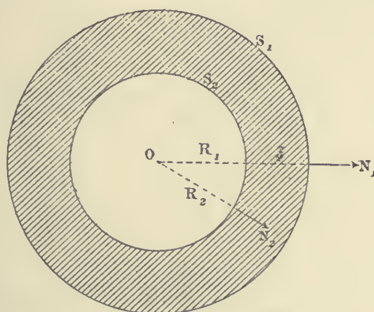
[1] Poisson, *Mémoire sur la théorie du magnétisme*, § III (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. V, p. 247; années 1821 et 1822).

masses agissantes. En tout point de la masse de fer doux, les composantes de l'aimantation seront données [Chap. I, égalités (9)] par les égalités

(2) $$\mathcal{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathcal{B} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathcal{C} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Une remarque au sujet de l'égalité (1). La surface S, qui limite la couche sphérique, se compose ici de deux surfaces distinctes (*fig.* 18) : une sphère extérieure S_1, de rayon R_1, et une sphère

Fig. 18.



intérieure S_2, de rayon R_2. Soient N_1 la normale extérieure à la première sphère, et N_2 la normale extérieure à la seconde. L'égalité (1) devra s'écrire sous la forme plus explicite

(3) $$\mathcal{V} + \psi + k \int_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} \frac{1}{r_1} dS_1 - k \int_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \frac{1}{r_2} dS_2 = 0.$$

La fonction $\mathcal{V}$, correspondant à un champ magnétique uniforme, est de la forme

(4) $$\mathcal{V} = -(Fx + Gy + Hz + K),$$

F, G, H étant les composantes constantes de l'action magnétique en un point du champ.

Prenons l'origine des coordonnées au centre commun des deux sphères S_1, S_2. Au lieu des coordonnées cartésiennes x, y, z, prenons les coordonnées polaires ρ, θ, ψ (*fig.* 19). Nous aurons

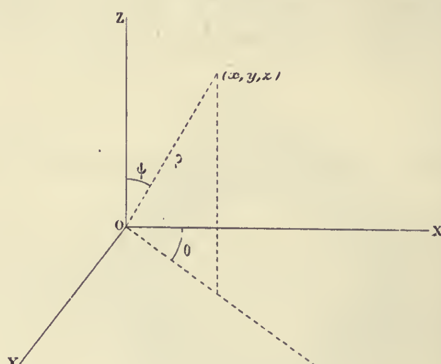
(5) $$\begin{cases} x = \rho \sin\psi \cos\theta, \\ y = \rho \sin\psi \sin\theta, \\ z = \rho \cos\psi. \end{cases}$$

L'expression (4) devient alors

$$(4\ bis)\qquad \mathfrak{V} = -\rho(F\sin\psi\cos\theta + G\sin\psi\sin\theta + H\cos\psi) - K.$$

Pour transformer l'égalité (3), nous remarquerons que, si l'on désigne par R_1, θ_1, ψ_1 les coordonnées d'un point de l'élément dS_1

Fig. 19.



et par R_2, θ_2, ψ_2 les coordonnées d'un point de l'élément dS_2, on aura

$$(6)\quad \begin{cases} r_1^2 = R_1^2 + \rho^2 - 2\rho R_1[\cos\psi\cos\psi_1 + \sin\psi\sin\psi_1\cos(\theta-\theta_1)], \\ r_2^2 = R_2^2 + \rho^2 - 2\rho R_2[\cos\psi\cos\psi_2 + \sin\psi\sin\psi_2\cos(\theta-\theta_2)], \\ dS_1 = R_1^2\sin\psi_1\,d\theta_1\,d\psi_1, \\ dS_2 = R_2^2\sin\psi_2\,d\theta_2\,d\psi_2. \end{cases}$$

Pour obtenir tous les éléments dS_1 de la sphère S_1, on devra faire varier θ_1 de o à 2π et ψ_1 de o à π.

Ces formules transformeront l'égalité (3) en une égalité que nous désignerons par (3 *bis*) et qu'il est inutile d'écrire.

Nous allons chercher à vérifier cette équation (3 *bis*), qui détermine une seule fonction φ, par une expression de la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi = \rho\ (M\sin\psi\cos\theta + N\sin\psi\sin\theta + P\cos\psi) \\ \quad + \frac{1}{\rho^2}(m\sin\psi\cos\theta + n\sin\psi\sin\theta + p\cos\psi) + Q, \end{cases}$$

M, N, P, m, n, p, Q étant sept constantes. Si, par un choix convenable de ces constantes, nous pouvons amener la fonction φ donnée par cette égalité (7) à vérifier l'égalité (3 *bis*), nous au-

rons assurément déterminé, à l'intérieur du fer doux, la fonction φ que nous cherchons.

L'égalité (7) nous donne

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial N_1} &= \left(M - \frac{2m}{R_1^3}\right)\sin\psi\cos\theta + \left(N - \frac{2n}{R_1^3}\right)\sin\psi\sin\theta + \left(P - \frac{2p}{R_1^3}\right)\cos\psi, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial N_2} &= \left(M - \frac{2m}{R_2^3}\right)\sin\psi\cos\theta + \left(N - \frac{2n}{R_2^3}\right)\sin\psi\sin\theta + \left(P - \frac{2p}{R_2^3}\right)\cos\psi. \end{aligned}\right.$$

Soit L_1 la grandeur géométrique qui a pour composantes

$$(9)\qquad M - \frac{2m}{R_1^3}, \qquad N - \frac{2n}{R_1^3}, \qquad P - \frac{2p}{R_1^3}.$$

Soit L_2 la grandeur géométrique qui a pour composantes

$$(9\ bis)\qquad M - \frac{2m}{R_2^3}, \qquad N - \frac{2n}{R_2^3}, \qquad P - \frac{2p}{R_2^3}.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} &k \mathrm{S}_{S_1} \frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\frac{1}{r_1}\,dS_1 - k\mathrm{S}_{S_2}\frac{\partial\varphi}{\partial N_2}\frac{1}{r_2}\,dS_2 \\ &\quad = kL_1 \mathrm{S}_{S_1} \frac{\cos(L_1, R_1)}{[R_1^2 + \rho^2 - 2\rho R_1\cos(\rho, R_1)]^{\frac{1}{2}}}\,dS_1 \\ &\quad - kL_2 \mathrm{S}_{S_2} \frac{\cos(L_2, R_2)}{[R_2^2 + \rho^2 - 2\rho R_2\cos(\rho, R_2)]^{\frac{1}{2}}}\,dS_2. \end{aligned}$$

Posons

$$(\rho, R_1) = u, \qquad (\rho, L_1) = \upsilon.$$

Désignons par p l'angle que fait un plan mené par les demi-droites ρ, R_1 avec un plan mené par les demi-droites ρ, L_1. Nous trouverons sans peine que l'on a

$$\begin{aligned} &kL_1 \mathrm{S}_{S_1} \frac{\cos(L_1, R_1)}{[R_1^2 + \rho^2 - 2\rho R_1\cos(\rho, R_1)]^{\frac{1}{2}}}\,dS_1 \\ &\quad = kR_1^2 L_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\cos u\cos\upsilon + \sin u\sin\upsilon\cos p)\sin u\,du\,dp}{(R_1^2 + \rho^2 - 2\rho R_1\cos u)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad = 2\pi k R_1^2 L_1 \cos\upsilon \int_0^{\pi} \frac{\sin u\cos u\,du}{(R_1^2 + \rho^2 - 2\rho R_1\cos u)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Une transformation analogue s'applique à l'intégrale

$$k L_2 \mathbf{S}_{S_2} \frac{\cos(L_2, R_2)}{[R_2^2 + \rho_2 - 2\rho R_2 \cos(\rho, R_2)]^{\frac{1}{2}}} dS_2$$

et nous donne

$$(10) \left\{ \begin{aligned} & k \mathbf{S}_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} \frac{1}{r_1} dS_1 - k \mathbf{S}_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \frac{1}{r_2} dS_2 \\ & = 2\pi k \left[R_1^2 L_1 \cos(\rho, L_1) \int_0^\pi \frac{\sin u \cos u}{(R_1^2 + \rho^2 - 2\rho R_1 \cos u)^{\frac{1}{2}}} du \right. \\ & \qquad \left. - R_2^2 L_2 \cos(\rho, L_2) \int_0^\pi \frac{\sin u \cos u}{(R_2^2 + \rho^2 - 2\rho R_2 \cos u)^{\frac{1}{2}}} du \right]. \end{aligned} \right.$$

L'égalité (3 *bis*) doit être vérifiée pour les points de la couche sphérique. Pour ces points, on a

$$R_2 < \rho < R_1.$$

On pourra alors, en posant

$$\cos u = j,$$

effectuer les intégrations qui figurent dans l'égalité (10). On trouvera

$$\begin{aligned} & k \mathbf{S}_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} \frac{1}{r_1} dS_1 - k \mathbf{S} \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \frac{1}{r_2} dS_2 \\ & = \frac{4}{3} \pi k \left[\rho L_1 \cos(\rho, L_1) - \frac{R_2^2}{\rho} L_2 \cos(\rho, L_2) \right]. \end{aligned}$$

Si l'on se souvient que les composantes des grandeurs géométriques L_1, L_2 sont les quantités (9) et (9 *bis*), on trouve

$$\begin{aligned} & k \mathbf{S}_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} \frac{1}{r_1} dS_1 - k \mathbf{S}_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \frac{1}{r_2} dS_2 \\ & = \frac{4}{3} \pi k \rho \left\{ \left[M - \frac{2m}{R_1^3} - \left(\frac{R_2}{\rho}\right)^3 \left(M - \frac{2m}{R_2^3}\right) \right] \sin\psi \cos\theta \right. \\ & \qquad + \left[N - \frac{2n}{R_1^3} - \left(\frac{R_2}{\rho}\right)^3 \left(N - \frac{2n}{R_2^3}\right) \right] \sin\psi \sin\theta \\ & \qquad \left. + \left[P - \frac{2p}{R_1^3} - \left(\frac{R_2}{\rho}\right)^3 \left(P - \frac{2p}{R_2^3}\right) \right] \cos\psi \right\}. \end{aligned}$$

L'égalité (3 *bis*) devient alors

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi k\rho\Big\{ & \left[M-\frac{2m}{R_1^3}-\left(\frac{R_2}{\rho}\right)^3\left(M-\frac{2m}{R_2^3}\right)\right]\sin\psi\cos\theta \\ & +\left[N-\frac{2n}{R_1^3}-\left(\frac{R_2}{\rho}\right)^3\left(N-\frac{2n}{R_2^3}\right)\right]\sin\psi\sin\theta \\ & +\left[P-\frac{2p}{R_1^3}-\left(\frac{R_2}{\rho}\right)^3\left(P-\frac{2p}{R_2^3}\right)\right]\cos\psi\Big\} \\ & +\rho\left[\left(M+\frac{m}{\rho^3}\right)\sin\psi\cos\theta+\left(N+\frac{n}{\rho^3}\right)\sin\psi\sin\theta+\left(P+\frac{p}{\rho^3}\right)\cos\psi\right]+Q \\ & =\rho(F\sin\psi\cos\theta+G\sin\psi\sin\theta+H\cos\psi)+K.\end{aligned}$$

Cette égalité sera identiquement satisfaite si nous avons

$$\begin{aligned} F &= M\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)-\frac{8}{3}\pi k\frac{m}{R_1^3}, \\ G &= N\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)-\frac{8}{3}\pi k\frac{n}{R_1^3}, \\ H &= P\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)-\frac{8}{3}\pi k\frac{p}{R_1^3}, \\ 0 &= -\frac{4}{3}\pi k R_2^3 M+m\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right), \\ 0 &= -\frac{4}{3}\pi k R_2^3 N+n\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right), \\ 0 &= -\frac{4}{3}\pi k R_2^3 P+p\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right), \\ Q &= K.\end{aligned}$$

Les six premières égalités donnent

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} M &= \frac{1+\frac{8}{3}\pi k}{\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)\left(1+\frac{8}{3}\pi k\right)-2\left(\frac{4}{3}\pi k\right)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}F, \\ m &= \frac{\frac{4}{3}\pi k R_2^3}{\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)\left(1+\frac{8}{3}\pi k\right)-2\left(\frac{4}{3}\pi k\right)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}F\end{aligned}\right.$$

et des valeurs analogues pour N, n, P, p. On trouve ainsi que la

fonction φ a pour valeur, en tout point compris entre les deux sphères,

$$\varphi = \frac{\left(1+\frac{8}{3}\pi k\right)\rho + \frac{4}{3}\pi k \frac{R_2^3}{\rho^2}}{\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)\left(1+\frac{8}{3}\pi k\right) - 2\left(\frac{4}{3}\pi k\right)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}(F\sin\psi\cos\theta + G\sin\psi\sin\theta + H\cos\psi) + K,$$

ou bien, en coordonnées cartésiennes,

$$(12)\quad \varphi = K + \frac{\left(1+\frac{8}{3}\pi k\right) + \frac{4}{3}\pi k\left[\frac{R^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^3}{\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)\left(1+\frac{8}{3}\pi k\right) - 2\left(\frac{4}{3}\pi k\right)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}(Fx + Gy + Hz).$$

De là, par les égalités (2), on déduira les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation en tout point de la masse de fer doux.

§ 2. — Action de la sphère creuse hors de sa masse.

Après avoir déterminé l'état magnétique d'une sphère creuse placée dans un champ uniforme, proposons-nous de déterminer l'action que cette sphère exerce sur un pôle magnétique placé hors de sa masse; ce pôle peut se trouver à l'intérieur de la cavité que renferme la sphère creuse, ou en dehors de cette sphère.

La fonction φ nous étant connue par l'égalité (12) en tout point de la masse de la couche sphérique, nous ferons usage, pour déterminer la valeur de cette fonction en tout point étranger à cette couche, de l'égalité (3), qui peut s'écrire

$$(13)\quad \varphi + \mathfrak{P} + k \mathbf{S} \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=R_1} dS_1 - k \mathbf{S} \frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=R_2} dS_2 = 0.$$

Soit $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de la sphère aimantée; la définition de la fonction φ nous donne

$$\varphi + \mathfrak{P} + \mathcal{V} = 0,$$

ou bien

$$(13\ bis)\quad \mathcal{V} = k \mathbf{S} \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=R_1} dS_1 - k \mathbf{S} \frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=R_2} dS_2.$$

Dans ces égalités (13) et (13 *bis*), les quantités $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=R_1}$ et $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=R_2}$ sont calculées en prenant pour φ l'expression (12).

Au lieu de déterminer φ par l'égalité (13), nous déterminerons $\mho$ par l'égalité (13 *bis*). Pour les valeurs de ρ supérieures à R_1, l'égalité (13 *bis*) nous définira la fonction potentielle magnétique $\mho$ de la couche sphérique en un point (ρ, θ, ψ) de l'espace illimité situé en dehors de cette couche. Pour les valeurs de ρ inférieures à R_2, l'égalité (13 *bis*) nous définira la fonction potentielle magnétique $\mho$ de la couche sphérique en un point (ρ, θ, ψ) de la cavité que limite cette couche.

Posons

$$(14)\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{1+\frac{8}{3}\pi k - \frac{8}{3}\pi k\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)\left(1+\frac{8}{3}\pi k\right) - 2\left(\frac{4}{3}\pi k\right)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}, \\ A_2 = \dfrac{1-\frac{16}{3}\pi k}{\left(1+\frac{4}{3}\pi k\right)\left(1+\frac{8}{3}\pi k\right) - 2\left(\frac{4}{3}\pi k\right)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \end{cases}$$

et l'égalité (12) nous donnera

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=R_1} = A_1(F\sin\psi\cos\theta + G\sin\psi\sin\theta + H\cos\psi),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{\rho=R_2} = A_2(F\sin\psi\cos\theta + G\sin\psi\sin\theta + H\cos\psi).$$

Ces égalités nous donnent

$$\mho = k\left\{ A_1 \mathbf{S} \frac{F\sin\psi\cos\theta + G\sin\psi\sin\theta + H\cos\psi}{r_1}dS_1 - A_2 \mathbf{S} \frac{F\sin\psi\cos\theta + G\sin\psi\sin\theta + H\cos\psi}{r_2}dS_2\right\}.$$

Soit T l'action magnétique en un point du champ, action dont la grandeur est donnée par

$$(15)\qquad T = (F^2 + G^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'égalité précédente pourra s'écrire

$$\mho = kT\left\{ A_1 \mathbf{S} \frac{\cos(R, T)}{[R_1^2 + \rho^2 - 2\rho R_1\cos(\rho, R)]^{\frac{1}{2}}}dS_1 - A_2 \mathbf{S} \frac{\cos(R, T)}{[R_2^2 + \rho^2 - 2\rho R_2\cos(\rho, R)]^{\frac{1}{2}}}dS_2\right\}.$$

Une transformation semblable à celle qui a été employée au

paragraphe précédent permet d'écrire

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{V} = 2\pi k \mathrm{T} \cos(\rho, \mathrm{T}) \Bigg[& \mathrm{R}_1^2 \mathrm{A}_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin u \cos u}{(\mathrm{R}_1^2 + \rho^2 - 2\rho \mathrm{R}_1 \cos u)^{\frac{1}{2}}} du \\ & - \mathrm{R}_2^2 \mathrm{A}_2 \int_0^{\pi} \frac{\sin u \cos u}{(\mathrm{R}_2^2 + \rho^2 - 2\rho \mathrm{R}_2 \cos u)^{\frac{1}{2}}} du \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Pour pousser plus loin le calcul, il est nécessaire de distinguer les points situés dans la cavité qu'enferme la couche sphérique de ceux qui sont situés dans l'espace illimité.

Si le point (ρ, θ, ψ) est situé dans l'espace illimité, on a

$$\mathrm{R}_2 < \mathrm{R}_1 < \rho$$

et l'égalité (16) donne pour $\mathfrak{V}$ l'expression

$$\mathfrak{V}_e = \frac{4}{3}\pi k \mathrm{T} \cos(\rho, \mathrm{T}) \frac{\mathrm{A}_1 \mathrm{R}_1^3 - \mathrm{A}_2 \mathrm{R}_2^3}{\rho^2},$$

qui peut encore s'écrire, d'après les égalités (14),

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{V}_e = \frac{4}{3}\pi k & \frac{\left(1 + \frac{8}{3}\pi k\right)(\mathrm{R}_1^3 - \mathrm{R}_2^3)}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi k\right)\left(1 + \frac{8}{3}\pi k\right) - 2\left(\frac{4}{3}\pi k\right)^2 \left(\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}\right)^3} \\ & \times \frac{\mathrm{F} \sin\psi \cos\theta + \mathrm{G} \sin\psi \sin\theta + \mathrm{H} \cos\psi}{\rho^2}. \end{aligned} \right.$$

Si le point (ρ, θ, ψ) est situé dans la cavité qu'enferme la sphère creuse, on a

$$\rho < \mathrm{R}_2 < \mathrm{R}_1,$$

et l'égalité (16) donne pour $\mathfrak{V}$ l'expression

$$\mathfrak{V}_i = \frac{4}{3}\pi k \mathrm{T} \cos(\rho, \mathrm{T})(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\rho,$$

qui peut encore s'écrire, d'après les égalités (16),

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{V}_i = \frac{4}{3}\pi k & \frac{\frac{8}{3}\pi k \left[1 + \left(\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}\right)^3\right]}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi k\right)\left(1 + \frac{8}{3}\pi k\right) - 2\left(\frac{4}{3}\pi k\right)^2 \left(\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}\right)^3} \\ & \times (\mathrm{F} \sin\psi \cos\theta + \mathrm{G} \sin\psi \sin\theta + \mathrm{H} \cos\psi)\rho. \end{aligned} \right.$$

Posons, pour abréger,

$$\mu = \frac{\frac{4}{3}\pi k}{1 + \frac{4}{3}\pi k}, \tag{19}$$

et nos formules (17) et (18) deviendront

$$\mathcal{V}_e = \frac{\mu(1+\mu)(R_1^3 - R_2^3)}{1 + \mu - 2\mu^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \frac{F\sin\psi\cos\theta + G\sin\psi\sin\theta + H\cos\psi}{\rho^2},$$

$$\mathcal{V}_i = \frac{2\mu^2\left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\right]}{1 + \mu - 2\mu^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} (F\sin\psi\cos\theta + G\sin\psi\sin\theta + H\cos\psi)\rho$$

ou bien, en coordonnées cartésiennes,

$$\mathcal{V}_e = \frac{\mu(1+\mu)(R_1^3 - R_2^3)}{1 + \mu - 2\mu^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \frac{Fx + Gy + Hz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{17 bis}$$

$$\mathcal{V}_i = \frac{2\mu^2\left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\right]}{1 + \mu - 2\mu^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} (Fx + Gy + Hz). \tag{18 bis}$$

Ces formules donneront, par différentiation, les composantes de l'action magnétique exercée par la sphère creuse en un point étranger à sa masse et situé soit dans l'espace illimité qui lui est extérieur, soit à l'intérieur de la cavité qu'elle renferme.

Discutons les conséquences les plus remarquables de ces deux égalités (17 *bis*) et (18 *bis*).

Nous avons vu, au Chapitre précédent, que la quantité μ différait très peu de l'unité pour les diverses espèces de fer doux. Si, comme première approximation, nous faisons $\mu = 1$ dans l'égalité (17 *bis*), nous trouvons

$$\mathcal{V}_e = \frac{R_1^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (Fx + Gy + Hz).$$

La fonction potentielle magnétique, dans l'espace illimité extérieur à la sphère, devient indépendante du rayon R_2 de la cavité.

Ainsi, si μ était rigoureusement égal à l'unité, une sphère magnétique pleine et une sphère magnétique creuse ayant même rayon extérieur exerceraient la même action magnétique dans l'espace qui les environne. Barlow [1], qui avait reconnu ce fait par expérience, l'avait interprété en admettant que les fluides magnétiques se portent à la surface des corps aimantés. La véritable interprétation fut donnée par Poisson [2].

La quantité μ est, en réalité, un peu inférieure à l'unité. Si nous posons

$$\mu = 1 - \zeta,$$

l'égalité (17 *bis*) deviendra

$$\mathcal{V}_e = \frac{R_1^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(Fx+Gy+Hz)\left[1 - \frac{2R_1^3+R_2^3}{2(R_1^3-R_2^3)}\zeta + \ldots\right].$$

On voit sans peine que cette valeur de $\mathcal{V}_e$ diffère d'autant plus de la valeur limite qu'elle prend pour $\zeta = 0$ ou $\mu = 1$ que R_2 est plus voisin de R_1. La sphère creuse n'exercera donc à l'extérieur la même action que la sphère pleine que si la cavité qu'elle renferme n'est pas trop grande. C'est, du reste, ce qu'a observé Barlow.

La formule (18 *bis*) nous montre que le champ engendré par une sphère creuse à l'intérieur de la cavité qu'elle renferme est un champ uniforme dont les lignes de force ont la même direction, mais non le même sens que les lignes de force du champ par lequel la sphère est aimantée. Les intensités de ces deux champs sont dans un rapport constant l'une avec l'autre. Ce rapport serait égal à l'unité si μ était égal à l'unité; μ différant peu de l'unité, on voit que le champ engendré par la sphère creuse à l'intérieur de la cavité qu'elle renferme a sensiblement la même intensité que le champ dû aux actions magnétiques étrangères. Une aiguille aimantée, suspendue à l'intérieur d'une semblable cavité, est sensiblement astatique.

Si nous posons

$$\mu = 1 - \zeta,$$

---

(1) Barlow, *An essay on magnetic attractions*. 2e édition Londres, 1823.

(2) Poisson, *loc. cit.*

l'égalité (18 *bis*) deviendra

$$\mathcal{V}_i = (Fx + Gy + Hz)\left\{1 - \left[1 + 4\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\right]\zeta + \ldots\right\}.$$

On voit que l'aiguille magnétique enfermée dans une sphère creuse sera d'autant plus voisine d'être astatique que l'épaisseur de la couche de fer doux qui forme la sphère sera plus grande.



CHAPITRE IV.

AIMANTATION DANS UN CHAMP QUELCONQUE. MÉTHODE DE BEER.

§ 1. — Aimantation dans un champ quelconque.

Nous venons d'exposer la solution, donnée par Poisson pour quelques cas particuliers, du problème de l'aimantation par influence dans un champ magnétique uniforme. A ces exemples, il conviendrait de joindre l'étude de l'aimantation prise dans un champ uniforme par une masse comprise entre deux ellipsoïdes homofocaux. Cette étude a été donnée récemment par M. Greenhill (1).

L'étude de l'aimantation dans un champ magnétique uniforme présente un haut intérêt, car elle donne les lois de l'aimantation par la terre. C'est à cette étude que l'on doit la solution d'un problème dont l'intérêt pratique est considérable, le problème de la régulation et de la compensation des compas à bord des navires. Ce problème, entamé par Barlow et par Poisson, a été complètement résolu par Sir W. Thomson (2).

Toutefois, le problème de l'aimantation dans un champ magnétique uniforme n'est qu'un cas très particulier du problème général de l'aimantation par influence; il nous faut maintenant dire quelques mots des efforts entrepris pour résoudre ce dernier dans toute son étendue.

Par l'emploi des fonctions sphériques, Poisson (3) est parvenu

(1) Greenhill, *Sur le magnétisme d'un ellipsoïde creux* (*Journal de Physique pure et appliquée*, t. X, p. 294; 1881).

(2) Voir à ce sujet : A. Collet, *Traité théorique et pratique de la régulation et de la compensation des compas, avec ou sans relèvement;* Paris, 1886.

(3) Poisson, *Mémoire sur la théorie du magnétisme*, § III (*Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1821-1822, t. V, p. 247).

à déterminer l'aimantation qu'une sphère pleine ou creuse prend dans un champ quelconque. M. F.-E. Neumann ([1]) a rendu cette solution plus parfaite et en a fait diverses applications.

M. F.-E. Neumann ([2]) a étendu à un ellipsoïde de révolution quelconque la méthode par laquelle Poisson avait déterminé l'aimantation prise par une sphère dans un champ magnétique quelconque.

Si l'on fait croître indéfiniment le grand axe de l'ellipse méridienne en laissant fixe le centre et le petit axe, l'ellipsoïde de révolution se transforme en un cylindre indéfini ; mais, en général, les formules de M. F.-E. Neumann perdent toute signification lorsque l'excentricité de l'ellipse méridienne croît au delà de toute limite; l'aimantation du cylindre de révolution indéfini est donc un problème qui doit être traité directement. C'est ce qu'a fait G. Kirchhoff ([3]) dans un important Mémoire que nous aurons plusieurs fois occasion de citer.

Lipschitz ([4]) a résolu le problème de l'aimantation prise, dans un champ quelconque, par un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Le problème de l'induction magnétique de deux sphères soumises à des actions données a été traité par M. Chwolson ([5]) et M. Carl Neumann ([6]).

Les solutions de ces divers problèmes sont trop compliquées pour qu'il nous soit possible de les exposer ici. Nous nous contenterons d'indiquer un très beau théorème, dû à M. F.-E. Neu-

---

([1]) F.-E. NEUMANN, *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induction;* Leipzig, 1881.

([2]) F.-E. NEUMANN, *Entwickelung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach Laplace'schen* $Y^{(n)}$ *fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoïdes welches durch vertheilende Kräfte erregt ist* (*Journal de Crelle*, t. XXXVII, p. 21; 1848).

([3]) G. KIRCHHOFF, *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* (*Journal de Crelle*, t. XLVIII, p. 348. *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 193).

([4]) LIPSCHITZ, *Determinatio status magnetici viribus inducentibus commoti in ellipsoide* (*Dissertation;* Berlin, 1853).

([5]) CHWOLSON, *Ueber das Problem der magnetischen Induction auf zwei Kugeln* (*Schlömilch's Journal;* Jahrgang XXIV, p. 40).

([6]) CARL NEUMANN, *Hydrodynamische Untersuchungen nebst einem Anhange über die Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induction;* Leipzig, 1883.

mann (¹), par lequel on peut déterminer immédiatement le moment magnétique pris par un ellipsoïde quelconque sous l'action d'un champ quelconque.

Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont les composantes de l'aimantation au point (x, y, z) d'un corps, le moment magnétique de ce corps a pour composantes [Livre VII, Chap. I, égalités (13)]

$$A = \int \mathcal{A}\, dv, \qquad B = \int \mathcal{B}\, dv, \qquad C = \int \mathcal{C}\, dv.$$

Si le corps est un corps parfaitement doux aimanté par influence, nous avons [Livre VIII, Chap. I, égalité (9)]

$$\mathcal{A} = k\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mathcal{B} = k\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \mathcal{C} = k\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad A = k\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dv, \qquad B = k\int \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dv, \qquad C = k\int \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dv.$$

L'identité de Green nous permet de transformer ces expressions. Si U et V sont deux fonctions régulières dans l'espace considéré, si dS est un élement de la surface qui limite cet espace, on a

$$\int U \Delta V\, dv = -\int \left\| \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv - \mathbf{S}\, U \frac{\partial V}{\partial N_i}\, dS.$$

Faisons, dans cette égalité,

$$U = x, \qquad V = \varphi$$

et remarquons que la fonction φ est harmonique à l'intérieur du corps aimanté, nous aurons, en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de l'élément dS,

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dv = -\mathbf{S}\, \xi \frac{\partial \varphi}{\partial N_i}\, dS$$

et, par conséquent,

$$(2) \qquad A = -k\,\mathbf{S}\, \xi \frac{\partial \varphi}{\partial N_i}\, dS.$$

(¹) F.-E. Neumann, *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus*, § 43; Leipzig, 1881.

Revenons maintenant à l'équation [Livre VIII, Chap. I, égalité (12)]

$$\mathfrak{P} + \varphi - k \mathop{\mathrm{S}} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} dS = 0,$$

qui a lieu en tout point (x, y, z) intérieur au corps. Dans cette égalité, $\mathfrak{P}$ est la fonction potentielle magnétique des masses étrangères à l'aimant, r est la distance du point (x, y, z) au point (ξ, η, ζ) de l'élément dS.

De cette égalité, on déduit

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS = 0$$

ou bien

$$\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dv + \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dv - k \int \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS\, dv = 0,$$

ce qui, par un changement dans l'ordre des intégrations, peut s'écrire

$$\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dv + \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dv - k \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \left(\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dv \right) dS = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi},$$

en sorte que l'égalité précédente peut s'écrire

$$\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dv + \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dv + k \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \frac{\partial V}{\partial \xi} dS = 0,$$

V étant la fonction potentielle ordinaire d'une masse homogène ayant même forme que l'aimant.

Dans le cas où l'aimant a la forme d'un ellipsoïde, cette égalité se simplifie. Dans ce cas, en effet, on a [Livre I, Chap. VI, égalités (15)]

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2Lx,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2My,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2Nz,$$

L, M, N étant [Livre I, Chap. VI, égalités (13)] trois constantes λ, μ, ν, pour les points intérieurs à l'ellipsoïde, et trois fonctions de x, y, z, pour les points extérieurs.

L'égalité précédente devient alors

$$\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dv + \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dv - 2k\lambda \, \mathbf{S} \, \xi \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} dS = 0.$$

En vertu des égalités (1) et (2), cette égalité nous donne la première des trois relations

$$(3) \quad \begin{cases} A = -\dfrac{k}{1+2k\lambda} \displaystyle\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dv, \\ B = -\dfrac{k}{1+2k\mu} \displaystyle\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} dv, \\ C = -\dfrac{k}{1+2k\nu} \displaystyle\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} dv. \end{cases}$$

Les deux dernières s'obtiennent d'une manière analogue. Ces égalités fournissent immédiatement les composantes du moment magnétique pris par un ellipsoïde de fer doux dans un champ donné.

Dans le cas où l'ellipsoïde se réduit à une sphère, on a

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{3}\pi,$$

et les égalités précédentes deviennent

$$(4) \quad \begin{cases} A = -\dfrac{k}{1+\frac{4}{3}\pi k} \displaystyle\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} dv, \\ B = -\dfrac{k}{1+\frac{4}{3}\pi k} \displaystyle\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} dv, \\ C = -\dfrac{k}{1+\frac{4}{3}\pi k} \displaystyle\int \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} dv. \end{cases}$$

§ 2. — Méthode de Beer.

Les travaux que nous avons mentionnés au paragraphe précédent n'ont fourni la solution du problème de l'aimantation par influence que pour un nombre de cas extrêmement restreint.

Beer [1] a donné une méthode qui permet de résoudre le problème de l'aimantation par influence pour tout aimant terminé par une surface de second rang non biétoilée. Beer s'était contenté d'énoncer son algorithme. M. Carl Neumann [2], dont les recherches sur la méthode de la moyenne arithmétique ont été provoquées par la Note de Beer, a démontré la légitimité de l'algorithme créé par ce physicien.

La méthode de Beer serait, dans la plupart des cas, rendue inapplicable par la longueur des calculs. Mais elle a du moins l'avantage de prouver, pour une classe très étendue de corps, l'existence d'une solution au problème de l'aimantation par influence.

Nous avons vu [Chap. I, égalité (12)] que la difficulté du problème de l'aimantation par influence consistait essentiellement à trouver une fonction φ, vérifiant en tout point intérieur à l'aimant l'égalité

$$(5) \qquad \mathfrak{P} + \varphi - k \int \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \frac{1}{r} dS = 0,$$

$\mathfrak{P}$ étant la fonction potentielle qui définit le champ magnétique.

Au moyen de la fonction $\mathfrak{P}$, formons la série de fonctions

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}' = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int \mathfrak{P} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i} dS, \\ \mathfrak{P}'' = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int \mathfrak{P}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i} dS, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si la surface qui limite le corps magnétique est une surface de second rang non biétoilée, nous savons (Livre II, Chap. IX, § 5) que la série

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}''' + \dots$$

sera uniformément convergente. Pour un corps magnétique ou

---

(1) A. Beer, *Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induktion* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. XLVIII, p. 137; 1856). — *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre von Magnetismus und die Elektrodynamik,* p. 158 et suiv.; Brunswick, 1865.

(2) C. Neumann, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential,* Ch. VI; Leipzig, 1877.

paramagnétique, mais non diamagnétique, absolument quelconque, la quantité

$$\frac{4\pi k}{1+4\pi k}$$

est un nombre positif et inférieur à 1. La série

$$(7)\quad \psi = \left[\mathfrak{P} + \frac{4\pi k}{1+4\pi k}\mathfrak{P}' + \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^2 \mathfrak{P}'' + \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^3 \mathfrak{P}''' + \dots \right]$$

sera aussi une série convergente.

Mais, d'après l'identité de Green, on a

$$4\pi(\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}) = \mathrm{S}\, \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N_i}\frac{1}{r}\,dS,$$

$$4\pi(\mathfrak{P}'' - \mathfrak{P}') = \mathrm{S}\, \frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial N_i}\frac{1}{r}\,dS,$$

$$4\pi(\mathfrak{P}''' - \mathfrak{P}'') = \mathrm{S}\, \frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial N_i}\frac{1}{r}\,dS,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Multiplions les deux membres de la première de ces égalités par $\frac{4\pi k}{1+4\pi k}$; les deux membres de la seconde par $\left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^2$; ... et ajoutons-les membre à membre. Nous trouverons

$$\mathfrak{P} + \frac{1}{1+4\pi k}\psi + \frac{k}{1+4\pi k}\,\mathrm{S}\,\frac{\partial \psi}{\partial N_i}\frac{1}{r}\,dS = 0.$$

Si donc nous posons

$$(8)\qquad \varphi = \frac{\psi}{1+4\pi k},$$

la fonction φ, déterminée par les égalités (7) et (8), vérifiera l'égalité (5) en tout point intérieur au corps aimanté.

La fonction φ étant ainsi déterminée en tout point du corps aimanté, les composantes de l'aimantation seront données par les égalités

$$\mathcal{A} = k\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mathcal{B} = k\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \mathcal{C} = k\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Pour les points extérieurs au corps aimanté, la fonction φ sera déterminée par l'égalité (5)

$$\varphi = -\mathfrak{P} + k\,\mathrm{S}\,\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}\frac{1}{r}\,dS.$$

Au lieu de déterminer la fonction φ, on pourra déterminer la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}$ du corps aimanté. La définition de la fonction φ donne

$$\varphi = -(\mathfrak{P} + \mathcal{V}).$$

L'égalité précédente devient donc

$$\mathcal{V} = -k \int \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} \frac{1}{r} dS.$$

En vertu des égalités (7) et (8), cette dernière formule devient

$$(9)\quad \mathcal{V} = \frac{k}{1+4\pi k} \int \left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N_i} + \frac{4\pi k}{1+4\pi k} \frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial N_i} + \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^2 \frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial N_i} + \ldots\right] \frac{1}{r} dS.$$

La couche fictive équivalente au corps aimanté a donc pour densité superficielle

$$(10)\quad \sigma = \frac{k}{1+4\pi k} \left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial N_i} + \frac{4\pi k}{1+4\pi k} \frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial N_i} + \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^2 \frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial N_i} + \ldots\right].$$

La méthode de Beer s'applique, quelle que soit la valeur positive de k, à tout corps magnétique limité par une surface de second rang non biétoilée. M. Carl Neumann a montré que, si l'on se donnait un corps magnétique limité par une surface quelconque, on pouvait assigner un nombre positif K, dépendant de la forme de la surface, tel que la méthode de Beer s'applique à ce corps magnétique pour toute valeur de k inférieure à K.



LIVRE IX.

L'AIMANTATION PAR INFLUENCE ET LA THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

LE POTENTIEL THERMODYNAMIQUE D'UN SYSTÈME AIMANTÉ.

§ 1. — Défauts de la théorie précédente.

Nous venons d'exposer, au Livre précédent, quelques-uns des développements analytiques auxquels donne lieu la théorie de l'aimantation par influence imaginée par Poisson. Il s'en faut bien que les conséquences de cette théorie soient, de tout point, d'accord avec l'expérience.

Prenons les équations mêmes sur lesquelles repose toute cette théorie [Livre VIII, Chap. I, équations (2)]. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant les composantes de l'aimantation en un point du corps parfaitement doux, $\mathfrak{P}$ la fonction potentielle magnétique de ce champ, $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique du corps doux, k son coefficient d'aimantation, ces équations sont

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -k\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}\right), \\ \mathcal{B} = -k\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\right), \\ \mathcal{C} = -k\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Multiplions par une constante arbitraire λ les composantes du

champ en chaque point, c'est-à-dire les quantités $\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}$; multiplions aussi par la même constante λ les composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de l'aimantation; cette dernière opération aura pour effet de multiplier par λ la valeur de $\mathcal{V}$ en chaque point, et, par conséquent, les valeurs en chaque point de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$. Si donc les équations (1) étaient vérifiées avant cette opération, elles le sont encore après. Ainsi se trouve démontrée la proposition suivante :

D'après la théorie de Poisson, si un corps parfaitement doux de forme déterminée occupe une position déterminée dans un champ dont les lignes de force ont une forme déterminée, son aimantation varie proportionnellement à l'intensité du champ.

L'expérience montre, au contraire, que, lorsque l'intensité du champ augmente au delà de toute limite, l'aimantation du fer doux tend vers un état limite que l'on nomme l'*état de saturation*.

La contradiction qui existe entre la théorie de Poisson et l'expérience peut également se manifester de la manière suivante, qui n'est qu'une autre forme de la précédente.

Supposons que l'on détermine le coefficient d'aimantation k du fer doux par la méthode indiquée précédemment [Livre VIII, Chap. II, § 3). Au lieu de trouver, comme valeur de k, un nombre indépendant du champ magnétique employé à l'aimantation du fer doux, on trouve un nombre qui varie avec ce champ et qui est d'autant plus petit que le champ est plus intense.

Les équations (1) qui représentent, dans la théorie de Poisson, les conditions de l'équilibre magnétique, ne peuvent être conservées, du moins en général. G. Kirchhoff [1], dans une remarque qui termine son beau Mémoire sur l'aimantation d'un cylindre indéfini, a montré comment on pouvait modifier ces équations. Au coefficient d'aimantation constant k, il a proposé de substituer une *fonction magnétisante* $F(\mathfrak{M})$ variable avec l'intensité $\mathfrak{M}$ de l'ai-

---

(1) KIRCHHOFF, *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen. Anhang* (*Crelle's Journal*, Bd. XLVIII, p. 348; 1854. — *Kirchhoff's gesammelte Abhandlungen*, p. 217).

mantation. Les égalités (1) sont alors remplacées par les suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}\right), \\ \mathcal{B} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial y}\right), \\ \mathcal{C} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Le corps est magnétique ou paramagnétique si la fonction $F(\mathfrak{M})$ est positive; diamagnétique, si la fonction $F(\mathfrak{M})$ est négative.

G. Kirchhoff a montré comment on pouvait, une fois ce point de départ donné, réduire le problème de l'aimantation par influence à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. Nous examinerons cette réduction dans un Chapitre ultérieur, et nous verrons que les équations données par G. Kirchhoff ne sont plus, comme les équations de Poisson, en désaccord avec l'expérience.

Les équations (2) sont introduites d'emblée par G. Kirchhoff comme une hypothèse première que ne justifie aucune considération préliminaire; or elles sont assez complexes pour que cette hypothèse, que rien ne prépare, rebute quelque peu l'esprit. D'autre part, il est fort difficile d'en trouver des vérifications expérimentales qui ne soient pas très indirectes et détournées. Il serait donc désirable de déduire les équations (2) de quelques hypothèses plus simples; c'est ce que la Thermodynamique [1] va nous permettre de faire; elle nous fournira, en outre, l'explication d'un grand nombre de phénomènes qui se relient directement ou indirectement à l'étude de l'aimantation par influence. Nous allons donc, en nous aidant de la Thermodynamique, reprendre l'étude des systèmes aimantés à partir de ses premiers principes.

§ 2. — Le potentiel thermodynamique interne d'un système aimanté.

Un corps aimanté est défini par la connaissance de la valeur et de la direction que prend, en chaque point de ce corps, une cer-

---

[1] P. Duhem, *Théorie nouvelle de l'aimantation par influence, fondée sur la Thermodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1888).

taine grandeur géométrique que l'on nomme l'*intensité d'aimantation en ce point.*

Considérons un système de corps isotropes ou non qui peuvent être électrisés et aimantés et proposons-nous de déterminer la forme du potentiel thermodynamique interne de ce système, potentiel que nous désignerons par la lettre $\mathfrak{F}$.

Nous avons obtenu [Livre IV, Chap. II, égalité (15)] l'expression de ce potentiel en supposant l'intensité d'aimantation égale à o en tout point. Nous avons trouvé que l'on avait, dans ce cas,

$$\mathfrak{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + W + \sum \Theta q,$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur;
Υ l'énergie interne du système désélectrisé et désaimanté;
Σ l'entropie du système dans les mêmes conditions;
T la température absolue;
W le potentiel électrostatique;
q la charge qui se trouve en un point;
Θ une quantité qui dépend de la nature que le système désaimanté présente autour de ce point; enfin le signe $\sum$ indiquant une sommation qui s'étend à toutes les charges du système.

L'expression du potentiel thermodynamique interne d'un système aimanté quelconque doit, d'après ce que nous venons de dire, être de la forme suivante

$$\mathfrak{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + W + \sum \Theta q + \mathfrak{F}', \tag{1}$$

$\mathfrak{F}'$ étant une certaine quantité qui se réduit à o si l'intensité d'aimantation devient égale à o en tout point. C'est la forme de cette quantité $\mathfrak{F}'$ qu'il s'agit de déterminer.

Divisons le système en un nombre illimité n d'éléments infiniment petits, de forme quelconque, que nous désignerons par dv_1, dv_2, ..., dv_n. Éloignons infiniment les uns des autres ces divers éléments. Le système étant dans cet état, le potentiel thermodynamique interne pourra être pris égal à la somme des potentiels thermodynamiques internes de chacun des éléments dv_1, dv_2, ..., dv_n considérés isolément. Si nous désignons ces derniers poten-

tiels par $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, nous aurons, lorsque le système est dans cet état,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n. \tag{2}$$

Soient $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ les valeurs de l'intensité d'aimantation en un point des éléments $dv_1, dv_2, \ldots, dv_n$. Nous pourrons écrire

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{F}_1 = \varphi_1 + \mathfrak{F}'_1, \\ \mathfrak{F}_2 = \varphi_2 + \mathfrak{F}'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{F}_n = \varphi_n + \mathfrak{F}'_n, \end{array}\right. \tag{3}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, ne dépendant pas de $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$, tandis que $\mathfrak{F}'_1$ devient égal à o en même temps que $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{F}'_2$ en même temps que $\mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{F}'_n$ en même temps que $\mathfrak{M}_n$.

Or la détermination du potentiel thermodynamique d'un système non aimanté repose sur cette hypothèse (Livre IV, Chap. II, § 1) que, dans l'état considéré du système,

$$E(\Upsilon - T\Sigma) + W + \sum \Theta q = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

Les égalités (1), (2), (3), jointes à cette dernière égalité, montrent donc que, lorsque les divers éléments du système sont infiniment éloignés les uns des autres, on a

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'_1 + \mathfrak{F}'_2 + \ldots + \mathfrak{F}'_n.$$

On a donc, en général,

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n + \mathfrak{F}'', \tag{4}$$

$\mathfrak{F}''$ dépendant de la disposition des divers éléments du système les uns par rapport aux autres et devenant égal à o quand tout le système est désaimanté.

Nous pourrons toujours écrire, au moins d'une manière,

$$\mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}''_1 + \mathfrak{F}''_2 + \ldots + \mathfrak{F}''_n, \tag{5}$$

$\mathfrak{F}''_1$ devenant égal à o en même temps que $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{F}''_2$ en même temps que $\mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{F}''_n$ en même temps que $\mathfrak{M}_n$. Nous supposerons que, parmi les diverses formes que l'on peut donner à une semblable égalité, il en est une vérifiant une *hypothèse* que nous allons énoncer.

Pour la commodité du langage, dans l'énoncé de cette hypothèse, nous nommerons la quantité $\mathfrak{F}''_1$ *potentiel magnétique du système sur l'élément* dv_1, la quantité $\mathfrak{F}''_2$ potentiel magnétique du système sur l'élément dv_2, ...

Imaginons que, sur l'élément dv_1, nous placions des quantités positives ou négatives μ_1, μ'_1, μ''_1, ... d'un fluide fictif (*fluide magnétique*), de manière que les conditions suivantes soient vérifiées :

1° On a

$$\mu_1 + \mu'_1 + \mu''_1 + \ldots = 0.$$

2° Si (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), ... sont les positions des masses μ_1, μ'_1, μ''_1, ..., on a

$$\mu_1 x + \mu'_1 x' + \mu''_1 x'' + \ldots = \mathcal{A}_1\, dv_1,$$
$$\mu_1 y + \mu'_1 y' + \mu''_1 y'' + \ldots = \mathcal{B}_1\, dv_1,$$
$$\mu_1 z + \mu'_1 z' + \mu''_1 z'' + \ldots = \mathcal{C}_1\, dv_1,$$

$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ étant les composantes de l'aimantation $\mathfrak{M}_1$ en un point de l'élément dv_1.

Une semblable distribution de fluide fictif prendra le nom de *distribution équivalente* à l'élément magnétique dv_1.

Il est facile de trouver une distribution équivalente à l'élément dv_1. Prenons deux points M_1, M'_1, situés à l'intérieur de cet élément, et tels que la direction $M_1M'_1$ coïncide avec la direction l_1 de l'aimantation en un point de l'élément dv_1. Plaçons au point M_1 une masse $-\mu_1$ et au point M'_1 une masse μ_1, la grandeur μ_1 étant définie par l'égalité

$$(6) \qquad \mu_1 . \overline{M_1 M'_1} = \mathfrak{M}_1\, dv_1.$$

Nous aurons une distribution magnétique équivalente à l'élément dv_1. On peut imaginer une infinité d'autres distributions équivalentes.

Ces définitions posées, arrivons à l'énoncé de l'hypothèse qui nous occupe.

Soit une distribution quelconque équivalente à l'élément dv_1, *formée par des masses* μ_1, μ'_1, μ''_1, ... *concentrées aux points* M_1, M'_1, M''_1, ... *de cet élément. Le potentiel magnétique du système*

sur cet élément peut s'écrire

$$\mathfrak{F}''_1 = \psi_1 + \psi'_1 + \psi''_1 + \ldots, \tag{7}$$

ψ_1 *dépendant seulement :*

1° *De la masse* μ_1 ;

2° *De l'état du système formé par les éléments* $dv_2, \ldots, dv_n$;

3° *De la situation du point* M_1 *par rapport à ce système.*

Les quantités $\psi'_1, \psi''_1, \ldots$ *dépendent des variables correspondantes.*

Cette hypothèse conduit tout d'abord au théorème suivant :

La quantité ψ_1 *est proportionnelle à* μ_1.

Ce théorème se démontre sans peine en remarquant que, si, dans une distribution équivalente à l'élément dv_1, deux masses μ_1, μ'_1 sont situées en deux points M_1, M'_1 dont la distance est infiniment petite par rapport aux dimensions de dv_1, on obtiendra une nouvelle distribution équivalente à l'élément dv_1 en supprimant ces deux masses et en les remplaçant par une masse unique $(\mu_1 + \mu'_1)$ placée au point M_1.

On peut donc écrire

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\mu_1 \mathfrak{V}_1, \tag{8}$$

$\mathfrak{V}_1$ dépendant seulement du système des éléments $dv_2, \ldots, dv_n$, et de la position du point M_1 par rapport à ce système. $\mathfrak{V}_1$ est ce que nous nommerons la *fonction potentielle magnétique du système au point* M_1.

Supposons que nous considérions la distribution fictive particulière à laquelle se rapporte l'égalité (6). Le point M_1 a pour coordonnées x_1, y_1, z_1 ; le point M'_1 a pour coordonnées

$$x_1 + \frac{dx_1}{dl_1}\overline{M_1M'_1}, \qquad y_1 + \frac{dy_1}{dl_1}\overline{M_1M'_1}, \qquad z_1 + \frac{dz_1}{dl_1}\overline{M_1M'_1}.$$

Au point M_1, la fonction potentielle magnétique du système des éléments $dv_2, \ldots, dv_n$ a pour valeur

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_1(x_1, y_1, z_1).$$

Au point M'_1, elle a pour valeur

$$\mathfrak{V}'_1 = \mathfrak{V}_1 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dl_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dl_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dl_1}\right)\overline{M_1M'_1}.$$

D'ailleurs, les égalités (7) et (8) donnent

$$\mathfrak{F}''_1 = \frac{1}{2}(\mu_1 \mathcal{V}'_1 - \mu_1 \mathcal{V}_1),$$

ou bien, en vertu de la dernière égalité,

$$\mathfrak{F}''_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dl_1} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dl_1} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dl_1}\right)\mu_1 . \overline{M_1 M'_1}.$$

Si l'on tient compte de l'égalité (6), on trouve

$$(9) \qquad \mathfrak{F}''_1 = \frac{1}{2}\left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_1}\right) dv_1.$$

Occupons-nous maintenant de la détermination de la fonction $\mathcal{V}_1$.

A l'égard de cette fonction, nous ferons les *hypothèses* suivantes :

1° *La fonction* $\mathcal{V}_1$ *peut s'écrire de la manière suivante*

$$(10) \qquad \mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_{13} + \ldots + \mathcal{U}_{1n},$$

$\mathcal{U}_{12}$ *dépendant uniquement des paramètres qui définissent l'élément* dv_2 *et sa situation par rapport à* M_1 ;

2° *Soit une distribution fictive quelconque, équivalente à l'élément* dv_2. *Elle est formée par des masses* $\mu_2, \mu'_2, \mu''_2, \ldots$ *de fluide magnétique concentrées en des points* $M_2, M'_2, M''_2, \ldots$. *On peut écrire*

$$(11) \qquad \mathcal{U}_{12} = \chi_{12} + \chi'_{12} + \chi''_{12} + \ldots,$$

χ_{12} *dépendant uniquement de la masse* μ_2 *et de la situation respective des deux points* M_1, M_2.

Par une démonstration analogue à celle qui nous a servi à établir l'égalité (8), nous prouverons que χ_{12} est proportionnel à μ_2. D'ailleurs, la situation respective des deux points M_1, M_2 dépend uniquement de leur distance r_{12}. On aura donc une égalité de la forme

$$(12) \qquad \chi_{12} = \mu_2 \varphi(r_{12}).$$

Parmi les distributions fictives équivalentes à l'élément dv_2, considérons-en une analogue à celle à laquelle l'égalité (6) se rap-

porte. Le point M_2 a pour coordonnées x_2, y_2, z_2; le point M'_2 a pour coordonnées

$$x'_2 = x_2 + \frac{dx_2}{dl_2}\overline{M_2M'_2}, \qquad y'_2 = y_2 + \frac{dy_2}{dl_2}\overline{M_2M'_2}, \qquad z'_2 = z_2 + \frac{dz_2}{dl_2}\overline{M_2M'_2}.$$

Si donc on a

$$\overline{M_1M_2} = r_{12},$$

on aura

$$\overline{M_1M'_2} = r'_{12} = r_{12} + \left(\frac{\partial r_{12}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl_2} + \frac{\partial r_{12}}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl_2} + \frac{\partial r_{12}}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl_2}\right)\overline{M_2M'_2}.$$

Or les égalités (11) et (12) donnent

$$\mathfrak{V}_{12} = \mu_2[\varphi(r'_{12}) - \varphi(r_{12})],$$

ou bien, en vertu de la dernière égalité,

$$\mathfrak{V}_{12} = \left[\frac{\partial\varphi(r_{12})}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl_2} + \frac{\partial\varphi(r_{12})}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl_2} + \frac{\partial\varphi(r_{12})}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl_2}\right]\mu_2.\overline{M_2M'_2}.$$

Comme d'ailleurs, d'après l'égalité (6)

$$\mu_2.\overline{M_2M'_2} = \mathfrak{M}_2\,dv_2,$$

on a

$$(13) \qquad \mathfrak{V}_{12} = \left[\mathfrak{A}_2\frac{\partial\varphi(r_{12})}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2\frac{\partial\varphi(r_{12})}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2\frac{\partial\varphi(r_{12})}{\partial z_2}\right]dv_2,$$

les égalités (10) et (13) donnent

$$(14) \quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{V}_1 = \left\| \mathfrak{A}_2\frac{\partial\varphi(r_{12})}{\partial x_2}\right\| dv_2 + \left\| \mathfrak{A}_3\frac{\partial\varphi(r_{13})}{\partial x_3}\right\| dv_3 + \ldots \\ + \left\| \mathfrak{A}_n\frac{\partial\varphi(r_{1n})}{\partial x_n}\right\| dv_n. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (5), (9) et (14) ne laissent plus à déterminer, dans l'expression de la quantité $\mathfrak{F}''$, que la fonction $\varphi(r)$.

Lorsque l'on déplace les uns par rapport aux autres les divers éléments dv_1, dv_2, ..., dv_n du système, sans changer la forme, l'aimantation ni l'état de chacun d'eux, chacune des quantités $\mathfrak{F}'_1$, $\mathfrak{F}'_2$, ..., $\mathfrak{F}'_n$ demeure invariable. Dans une semblable modification, la variation de la quantité $\mathfrak{F}$ se réduit à la variation de la quantité $\mathfrak{F}''$. Dès lors, le principe des déplacements sans changements d'état nous conduit sans peine au théorème suivant :

Les forces qui s'exercent dans un système aimanté inva-

riable d'état et d'aimantation s'obtiennent en adjoignant aux forces qui agiraient dans le système non aimanté un groupe de forces ayant pour potentiel la quantité $\mathfrak{F}''$ définie par les égalités (5), (9) *et* (14).

Soient, en particulier, deux aimants A_1, A_2 dont chacun est invariable de forme, d'état et d'aimantation, mais qui peuvent se déplacer l'un par rapport à l'autre.

Soient

dv_1 un élément de volume de l'aimant A_1;
(x_1, y_1, z_1) un point de cet élément;
dv_2 un élément de volume de l'aimant A_2;
(x_2, y_2, z_2) un point de cet élément;
$\mathcal{V}_1$ la fonction potentielle magnétique de l'aimant A_1;
$\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle magnétique de l'aimant A_2.

Il est aisé de voir que la partie variable de $\mathfrak{F}''$ se réduit à

$$\frac{1}{2}\int_{A_1}\left\|\mathfrak{M}_1\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_1}\right\|dv_1+\frac{1}{2}\int_{A_2}\left\|\mathfrak{M}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2}\right\|dv_2,$$

en sorte que cette quantité peut servir de potentiel aux actions mutuelles des deux aimants.

On a d'ailleurs identiquement

$$\int_{A_1}\left\|\mathfrak{M}_1\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_1}\right\|dv_1=\int_{A_2}\left\|\mathfrak{M}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2}\right\|dv_2,$$

en sorte que le potentiel mutuel des deux aimants A_1, A_2 peut prendre l'une des deux formes équivalentes

$$\mathfrak{P}=\int_{A_1}\left\|\mathfrak{M}_1\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_1}\right\|dv_1=\int_{A_2}\left\|\mathfrak{M}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2}\right\|dv_2.$$

C'est le résultat auquel nous sommes parvenus, par une tout autre méthode, au Livre VII, Chapitre I, égalités (10) et (10 *bis*). On pourrait donc replacer ici tous les développements déduits de cette égalité et qui constituent le Livre VII tout entier. En particulier, les expériences de Gauss, exposées au Livre VII, Chapitre II, nous conduisent à prendre

$$\varphi(r)=\frac{1}{r}.$$

L'égalité (14) nous montre alors que la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}(x, y, z)$ au point (x, y, z) pourra s'écrire

$$(15) \qquad \mathcal{V}(x, y, z) = \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right\| dv,$$

(ξ, η, ζ) étant un point de l'élément dv, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ l'aimantation en ce point et la sommation s'étendant à tous les éléments de volume du système. Elle sera identique à la fonction potentielle magnétique étudiée au Livre VII, Chapitre III.

Les égalités (5) et (9) donneront

$$(16) \qquad \mathfrak{F}'' = \frac{1}{2} \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv,$$

(x, y, z) étant un point de l'élément dv et $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ l'aimantation en ce point; l'intégration s'étend à tout le système. Cette fonction $\mathfrak{F}''$ ne diffère pas du potentiel magnétique $\mathfrak{J}$ défini et étudié au Livre VII, Chapitre III. Dorénavant, nous remplacerons le symbole $\mathfrak{F}''$ par le symbole $\mathfrak{J}$.

Les résultats que nous venons d'obtenir suffisent, comme nous l'avons déjà fait remarquer tout à l'heure, pour qu'il soit possible de reprendre tous les développements qui forment le Livre VII; mais, pour pousser plus loin, il nous faut déterminer la forme des quantités $\mathfrak{F}'_1, \mathfrak{F}'_2, \ldots, \mathfrak{F}'_n$.

$\mathfrak{F}'_1$ dépend de tous les paramètres qui définissent l'élément dv_1 considéré isolément. Cet élément, dans le cas le plus général, n'est pas isotrope; les diverses directions que l'on y peut tracer se distinguent les unes des autres; supposons-les rapportées à un certain trièdre de référence invariablement lié à la substance de l'élément, le *trièdre des axes principaux de dilatation*.

L'élément dv_1 est défini par

1° Son volume dv_1;

2° La forme de sa surface et son orientation par rapport aux axes d'élasticité;

3° Un certain nombre de paramètres $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ (sa densité, sa température, par exemple), qui fixent son état physique et chimique;

4° Les composantes $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ de l'aimantation suivant les trois axes principaux de dilatation;

5° L'état d'électrisation;

Relativement à cette dernière classe de paramètres, *nous admettrons,* comme nous l'avons déjà fait dans l'étude de l'électricité que, pour définir l'état de l'élément dv_1, il suffit de connaître la charge totale q_1 d'électricité qu'il porte, sans avoir besoin de connaître la distribution de cette charge.

Cette hypothèse faite, nous allons démontrer en premier lieu que la quantité $\mathfrak{F}'_1$ est proportionnelle à dv_1 et qu'elle ne dépend pas de la forme de la surface qui limite l'élément ni de son orientation par rapport aux axes de coordonnées.

Comme la distribution de la charge q_1 que porte l'élément dv_1 n'influe pas sur la valeur de $\mathfrak{F}'_1$, nous pouvons, pour démontrer la proposition précédente, supposer cette charge distribuée uniformément à l'intérieur de l'élément dv_1 avec une densité solide ρ_1.

Choisissons une fois pour toutes un *cube-type,* dont les dimensions soient infiniment petites par rapport à celles des éléments $dv_1, dv_2, \ldots, dv_n$. Divisons l'élément dv_1 en cubes égaux au cube type, ayant tous leurs arêtes parallèles aux axes principaux de dilatation.

L'élément dv_1 renfermera un nombre illimité k de semblables cubes. Soient $dV_1, dV_2, \ldots, dV_k$ ces cubes. Soient $f'_1, f'_2, \ldots, f'_k$ ce que deviennent, pour ces divers cubes, les quantités analogues à $\mathfrak{F}'_1$. La fonction potentielle magnétique de l'élément dv_1 tout entier a pour valeur u en un point (x, y, z) de l'élément dV. Il est évident, d'après la définition de $\mathfrak{F}'_1$, que l'on aura

$$\mathfrak{F}'_1 = f'_1 + f'_2 + \ldots + f'_k + \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial u}{\partial x} \right\| dV,$$

la sommation s'étendant à tous les éléments secondaires dV en lesquels l'élément dv_1 a été décomposé.

Mais, d'après ce qui a été démontré au Livre VII, Chapitre III, la quantité

$$\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial u}{\partial x} \right\| dV$$

sera infiniment petite par rapport à dv_1. Si donc on ne garde dans l'expression de $\mathfrak{F}'_1$ que les termes de l'ordre de dv_1, on aura

$$\mathfrak{F}'_1 = f'_1 + f'_2 + \ldots + f'_k,$$

ou bien encore, nos k petits cubes étant identiques entre eux,

$$\mathfrak{F}'_1 = k f'_1.$$

k est évidemment proportionnel à dv_1 ; f'_1 ne dépend ni de dv_1 ni de la forme de la surface qui limite cet élément. La proposition énoncée est donc démontrée.

Nous poserons

$$(17) \qquad \mathfrak{F}'_1 = \lambda_1\, dv_1.$$

Nous allons prouver maintenant que λ_1 ne dépend pas de la charge électrique q_1 que porte l'élément dv_1.

La quantité $\mathfrak{F}'_1$ et, par conséquent, la quantité λ_1 ne dépendent pas de la distribution qu'affecte cette charge q_1 sur l'élément dv_1. Divisons cet élément dv_1 en deux autres, dv_2, dv_3, ayant l'un et l'autre pour volume $\frac{dv_1}{2}\cdot$ Supposons que la charge q_1 se trouve tout entière dans l'élément dv_2 et que l'élément dv_3 ne renferme aucune charge.

Nous aurons évidemment

$$\mathfrak{F}'_1 = \mathfrak{F}'_2 + \mathfrak{F}'_3$$

ou

$$\lambda_1\, dv_1 = \lambda_2\, dv_2 + \lambda_3\, dv_3,$$

ce qui, à cause de l'égalité

$$dv_2 = dv_3 = \frac{dv_1}{2},$$

peut s'écrire

$$2\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3.$$

Or λ_2 ne diffère pas de λ_1, car tous les paramètres dont dépend la quantité λ ont la même valeur pour l'élément dv_1 et pour l'élément dv_2. On a donc

$$\lambda_1 = \lambda_3,$$

ce qui nous enseigne que la quantité λ a la même valeur pour l'élément dv_1 qui renferme la charge q_1 et pour l'élément dv_3 qui ne renferme aucune charge. Ainsi, comme nous l'avions annoncé, la quantité λ_1 ne dépend pas de la charge q_1 distribuée sur l'élément dv_1.

Nous pourrons donc, mettant en évidence les paramètres dont dépend λ_1, écrire

$$\lambda_1 = \mathcal{G}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \alpha_1, \beta_1, \ldots)$$

et, par conséquent, en vertu de l'égalité (17),

$$(18) \qquad \mathfrak{F}'_1 = \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha_1, \beta_1. \ldots)\, dv_1.$$

Cette égalité (18), jointe aux égalités (1), (4) et (16), détermine la forme du potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé et aimanté. Cette forme est la suivante

$$(19) \quad \mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q + \mathfrak{I} + \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv.$$

$\mathfrak{I}$ désigne le potentiel magnétique. L'intégration s'étend à tous les aimants. On doit se souvenir que la quantité $\mathcal{G}$ ne dépend pas des charges électriques distribuées sur les aimants.

§ 3. — Corps hémimorphes, holomorphes, isotropes.

La fonction $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$, dans l'expression de laquelle nous sous-entendrons les paramètres α, β, ..., doit devenir égale à o lorsque l'aimantation devient égale à o, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = 0, \qquad \mathfrak{C} = 0.$$

On peut donc écrire

$$(20) \begin{cases} \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{C} \\ \qquad + \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}^2 \\ \qquad + 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \end{cases}$$

λ, μ, ν étant trois constantes, et les quantités φ_{pq} ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ tendent vers o.

Mais cette forme générale de $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ subit, dans la plupart des cas intéressants, de notables simplifications. Elle ne demeure exprimée par l'égalité (20) que pour les substances pour lesquelles on peut distinguer, en chaque point, une direction de la direction opposée. Si un cristal est formé d'une pareille substance, il sera dépourvu de centre. Il présentera cette hémiédrie particulière que présentent la tourmaline, la calamine, ... et que nous nommerons l'*hémimorphie* (1). C'est donc seulement pour les *substances hémimorphes* que la fonction $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ sera donnée par la formule (20).

---

(1) Nous entendons ici par hémimorphie toute hémiédrie qui prive le cristal de centre; les cristallographes donnent en général à ce mot une signification plus restreinte.

Prenons maintenant une *substance holomorphe,* c'est-à-dire une substance telle qu'en chaque point une direction et la direction opposée soient équivalentes. Si une pareille substance forme un cristal, ce cristal aura un centre. Ce cas est, au point de vue du géomètre, un cas particulier; mais presque toutes les substances connues rentrent dans ce cas particulier.

La fonction $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ ne devra pas changer si l'on remplace l'aimantation par une aimantation égale, mais orientée en sens contraire, c'est-à-dire si l'on remplace respectivement $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ par $-\mathfrak{A}$, $-\mathfrak{B}$, $-\mathfrak{C}$. Cette condition exige que l'on ait

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0,$$

en sorte que, pour les substances holomorphes, $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ est donné par la formule suivante :

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = {} & \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}^2 + \varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}^2 \\ & + 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}\mathfrak{B}. \end{aligned} \right.$$

Parmi les substances holomorphes se trouvent les *substances isotropes* qui, tout en formant, au point de vue géométrique, un cas extrêmement particulier, forment, dans la nature, la classe de corps la plus nombreuse. Pour de semblables substances, toutes les directions sont équivalentes. La fonction $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ ne doit pas varier si l'on fait varier $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, sans faire varier la quantité

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On doit donc avoir, d'après l'égalité (21),

$$(22) \qquad \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \mathfrak{M}^2 \varphi(\mathfrak{M}),$$

$\varphi(\mathfrak{M})$ ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $\mathfrak{M}$ tend vers o. Pour abréger, nous écrirons simplement

$$(23) \qquad \mathfrak{M}^2 \varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{M}).$$

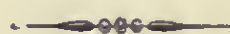
Dès lors, d'après les égalités (19), (22) et (23), le potentiel thermodynamique interne d'un système dont tous les corps aimantés sont isotropes s'écrira

$$(24) \qquad \mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \theta q + \mathfrak{T} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\, dv.$$

La fonction $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ dépend non seulement de l'intensité d'aiman-

tation $\mathfrak{M}$, mais encore des paramètres α, β, ... qui fixent l'état physique et chimique de l'élément dv, mais non des charges électriques distribuées sur les aimants.

Le présent Livre sera consacré à l'étude des corps aimantés isotropes. Nous aborderons, au Livre suivant, l'étude des cristaux aimantés.



CHAPITRE II.

LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE MAGNÉTIQUE.

---

§ 1. — Équations fondamentales de l'aimantation par influence.

Nous allons, dans ce Chapitre, chercher à déterminer la grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point d'un *corps dénué de force coercitive,* ou *parfaitement doux,* soumis à l'action d'*aimants permanents.* Commençons par définir ces deux mots d'une manière précise.

Considérons un système renfermant un corps susceptible de s'aimanter et cherchons à quelles conditions le travail non compensé, effectué dans une modification isothermique virtuelle quelconque de ce système, sera nul ou négatif; parmi ces conditions, qui sont les conditions d'équilibre fournies par la Thermodynamique, nous en trouverons qui expriment la proposition suivante : L'aimantation a, en chaque point du corps considéré, une certaine grandeur et une certaine direction. Si, en chaque point du corps, l'aimantation a cette direction et cette grandeur, cette aimantation ne peut plus subir aucune variation; l'équilibre magnétique est absolument établi.

Mais, un corps étant placé dans certaines conditions, il pourra se faire que l'équilibre magnétique ne s'établisse sur ce corps qu'au bout d'un temps plus ou moins long; il pourra se faire que, pour certains corps, ce temps soit extrêmement long, en sorte que, pendant un temps appréciable, l'aimantation de pareils corps demeure sensiblement indépendante des conditions dans lesquelles

ils sont placés. On est conduit ainsi à définir deux *formes limites* de corps magnétiques.

Nous dirons qu'un corps est *parfaitement doux* ou qu'il est *dénué de force coercitive,* si, en toute circonstance, l'aimantation en chacun des points de ce corps prend, au bout d'un temps très court, la grandeur et la direction indiquées par la Thermodynamique.

Au contraire, nous dirons qu'un aimant est *permanent* si l'aimantation en chaque point conserve une grandeur et une direction invariables en quelque circonstance que cet aimant se trouve placé.

Les aimants permanents et les corps parfaitement doux forment les deux limites extrêmes de la série des corps magnétiques. Il va sans dire que tous les corps magnétiques que nous présente la nature viennent se ranger entre ces deux limites, sans jamais réaliser complètement ni l'une ni l'autre d'entre elles. Néanmoins, ces deux limites correspondent aux seuls cas dont l'étude théorique puisse être faite complètement; nous pouvons étudier complètement les aimants permanents parce que leur état magnétique peut être censé donné arbitrairement, et les corps parfaitement doux parce que cet état est défini à chaque instant par les propositions de la Thermodynamique.

Envisageons un système formé d'aimants permanents et de corps dénués de force coercitive.

En un point (x_1, y_1, z_1) de ces derniers, l'aimantation a pour composantes $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$. On peut imaginer que, sans changer la position, le volume, la forme, l'électrisation, l'état physique ou chimique des divers corps qui constituent le système, on fasse, au sein d'un élément dv_1, varier $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$, de quantités infiniment petites arbitraires $\delta\mathcal{A}_1$, $\delta\mathcal{B}_1$, $\delta\mathcal{C}_1$. L'équilibre sera établi sur le corps parfaitement doux, si cette variation isothermique n'entraîne, pour le système, aucun travail non compensé.

Tous les corps du système demeurant invariables de volume, de forme et de position, les forces extérieures appliquées au système n'effectuent aucun travail. Le travail non compensé effectué se réduit alors à la variation changée de signe du potentiel thermodynamique interne.

Ce dernier est fourni par l'égalité (24) du Chapitre précédent;

il a pour valeur, en conservant les notations de ce Chapitre,

$$(1)\qquad \mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q + \mathfrak{J} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv.$$

Cherchons la variation subie par cette quantité lorsque, au sein de l'élément dv_1, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ varient respectivement de $\delta\mathfrak{A}_1$, $\delta\mathfrak{B}_1$, $\delta\mathfrak{C}_1$, tous les autres paramètres qui fixent l'état du système demeurant invariables.

La quantité

$$\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q$$

ne subit, dans ces conditions, aucune variation.

Soient dv_1, dv_2, ..., dv_n les éléments en lesquels le système est décomposé; soit $\mathcal{V}_1$ la fonction potentielle magnétique au point (x_1, y_1, z_1) de l'élément dv_1; soit $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle magnétique au point (x_2, y_2, z_2) de l'élément dv_2, ...

D'après l'égalité (16) du Chapitre précédent, on a

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\left(\left\| \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \ldots + \left\| \mathfrak{A}_n \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x_n} \right\| dv_n \right).$$

On a donc

$$(2)\quad \begin{cases} \delta\mathfrak{J} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1}\delta\mathfrak{A}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_1}\delta\mathfrak{B}_1 + \dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_1}\delta\mathfrak{C}_1 \right) \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left(\left\| \mathfrak{A}_1 \delta \dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \left\| \mathfrak{A}_2 \delta \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \ldots + \left\| \mathfrak{A}_n \delta \dfrac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x_n} \right\| dv_n \right). \end{cases}$$

Mais on peut écrire les égalités suivantes

$$\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \left\| \mathfrak{A}_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial x_3} \right\| dv_3 + \ldots + \left\| \mathfrak{A}_n \frac{\partial \frac{1}{r_{1n}}}{\partial x_n} \right\| dv_n \right),$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left\| \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{21}}}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \left\| \mathfrak{A}_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{23}}}{\partial x_3} \right\| dv_3 + \ldots + \left\| \mathfrak{A}_n \frac{\partial \frac{1}{r_{2n}}}{\partial x_n} \right\| dv_n \right),$$

. . . . ,

$$\frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\left\| \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{n1}}}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{n2}}}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \ldots + \left\| \mathfrak{A}_{n-1} \frac{\partial \frac{1}{r_{n\,n-1}}}{\partial x_{n-1}} \right\| dv_{n-1} \right).$$

Ces égalités donnent

$$\delta \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$\delta \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\| \delta \mathcal{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{21}}}{\partial x_1} \right\| dv_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\| \delta \mathcal{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial x_2} \right\| dv_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\delta \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \left\| \delta \mathcal{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{n1}}}{\partial x_1} \right\| dv_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\| \delta \mathcal{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{1n}}}{\partial x_n} \right\| dv_1.$$

On en déduit

$$\left\| \mathcal{A}_1 \delta \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \left\| \mathcal{A}_2 \delta \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \ldots + \left\| \mathcal{A}_n \delta \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x_n} \right\| dv_n$$

$$= \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left\| \delta \mathcal{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial x_2} \right\| \right\| dv_1\, dv_2 + \ldots + \left\| \mathcal{A}_n \frac{\partial}{\partial x_1} \left\| \delta \mathcal{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{1n}}}{\partial x_n} \right\| \right\| dv_1\, dv_n$$

$$= \left\| \delta \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \ldots + \left\| \mathcal{A}_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_n} \right\| dv_n \right) \right\| dv_1$$

$$= \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \delta \mathcal{A}_1 + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_1} \delta \mathcal{B}_1 + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_1} \delta \mathcal{C}_1 \right) dv_1.$$

L'égalité (2) devient alors

$$\delta \mathfrak{F} = \left\| \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \delta \mathcal{A}_1 \right\| dv_1. \tag{3}$$

Enfin on a

$$\delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv = \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_1, \alpha_1, \beta_1, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}_1} \left\| \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial \mathcal{A}_1} \delta \mathcal{A}_1 \right\| dv_1.$$

Mais l'égalité

$$\mathfrak{M}_1^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{B}_1^2 + \mathcal{C}_1^2$$

donne

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial \mathcal{A}_1} = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathfrak{M}_1}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial \mathcal{B}_1} = \frac{\mathcal{B}_1}{\mathfrak{M}_1}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial \mathcal{C}_1} = \frac{\mathcal{C}_1}{\mathfrak{M}_1},$$

en sorte que l'on peut écrire

$$\delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv = \frac{1}{\mathfrak{M}_1} \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_1, \alpha_1, \beta_1, \ldots)}{\mathfrak{M}_1} \left\| \mathcal{A}_1 \delta \mathcal{A}_1 \right\| dv_1. \tag{4}$$

Les égalités (1), (3), (4) conduisent à l'égalité

$$\delta\mathcal{F} = \left\| \left[\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\mathfrak{M}_1} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}_1, \alpha_1, \beta_1, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}_1} \mathcal{A}_1 \right] \delta\mathcal{A}_1 \right\| dv_1.$$

Cette quantité $\delta\mathcal{F}$ doit être égale à o quelles que soient les variations $\delta\mathcal{A}_1$, $\delta\mathcal{B}_1$, $\delta\mathcal{C}_1$. Si donc on pose

$$(5) \qquad F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{\mathfrak{M}}{\dfrac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}},$$

on devra avoir, en tous les points d'une masse dénuée de force coercitive et soumise à l'aimantation

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces équations sont les équations fondamentales de l'équilibre magnétique; elles ont la forme admise, à titre d'hypothèse, par G. Kirchhoff (Chap. I, § 1). Avant de leur faire subir aucune transformation, nous allons en déduire quelques remarques importantes.

Ces équations donnent

$$\frac{\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}}{\mathcal{A}} = \frac{\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}}{\mathcal{B}} = \frac{\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}}{\mathcal{C}},$$

ce qui signifie que *l'aimantation en un point d'une masse isotrope dénuée de force coercitive et la grandeur géométrique dont les composantes sont*

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$$

sont dirigées suivant la même droite. Cette proposition se retrouve dans toutes les théories de l'induction magnétique proposées depuis Poisson; elle est une conséquence plus ou moins immédiate des hypothèses sur lesquelles reposent ces théories.

Les équations (6) donnent encore

$$(7) \qquad \frac{\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2} = F^2(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots).$$

Le rapport de la grandeur géométrique précédente à l'intensité d'aimantation dépend de l'intensité d'aimantation et de la nature de la substance.

Cette conséquence est conforme aux hypothèses faites par G. Kirchhoff sur l'aimantation par influence; toutes les théories de l'aimantation, autres que celles de G. Kirchhoff, conduisent à regarder le rapport précédent comme indépendant de l'intensité d'aimantation; nous avons vu que, par là, ces théories se mettaient en désaccord avec l'expérience.

Le coefficient $F(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ porte, comme nous l'avons déjà dit, le nom de *fonction magnétisante*.

Si la fonction magnétisante est positive, l'axe magnétique et la grandeur géométrique dont les composantes sont $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$ sont orientés en sens contraire ; le corps est dit alors *magnétique* si la fonction magnétisante est grande, et *paramagnétique* si la fonction magnétisante est petite.

Si, au contraire, la fonction magnétisante était négative, l'axe magnétique et la grandeur géométrique dont les composantes sont $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$ seraient dirigés dans le même sens, le corps serait dit *diamagnétique*.

§ 2. — Le problème de l'induction magnétique se ramène à la détermination de la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$.

Nous allons maintenant examiner comment, en supposant connue la forme de la fonction magnétisante $F(\mathcal{M}; \alpha, \beta, \ldots)$, on pourrait mettre en équation le problème de l'induction magnétique. La méthode à suivre a été indiquée par G. Kirchhoff [1].

---

(1) G. Kirchhoff, *Ueber den Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* (*Crelle's Journal*, t. XLVIII, p. 348; 1854. — *Kirchhoff's gesammelte Abhandlungen*, p. 193).

Posons, comme nous en sommes convenus [Livre VII, Chap. III, égalité (19)],

$$\Pi \mathcal{V} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2.$$

L'égalité (7) peut s'écrire

(7 *bis*) $$\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}\right]^2 = \Pi \mathcal{V}.$$

Si la fonction F est connue, cette équation (7 *bis*) pourra se résoudre par rapport à $\mathfrak{M}$, et donnera

(8) $$\mathfrak{M} = \sigma(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots).$$

Posons maintenant

(9) $$\lambda(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots) = -F[\sigma(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots), \alpha, \beta, \ldots].$$

Nous voyons que, *toutes les fois que la fonction* F *a une forme connue, la forme de la fonction* λ *est déterminée.*

Moyennant les égalités (8) et (9), les égalités (6) deviennent

(10) $$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= \lambda(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} &= \lambda(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathcal{C} &= \lambda(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités montrent que, *lorsqu'on connaît la forme de la fonction magnétisante, il suffit de connaître la fonction* $\mathcal{V}$ *pour pouvoir déterminer les composantes de l'aimantation en chaque point du corps parfaitement doux.*

Nous avons remarqué, il y a un instant que, lorsqu'on connaissait la forme de la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$, on connaissait la forme de la fonction $\lambda(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)$; réciproquement, *si l'on connaît la forme de la fonction* $\lambda(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)$, *on peut déterminer la forme de la fonction magnétisante* $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$.

En effet, les équations (10) permettent d'écrire

$$\mathfrak{M}^2 = \lambda^2(\Pi \mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)\,\Pi \mathcal{V}.$$

Si l'on connaît la forme de la fonction λ, on peut résoudre

cette équation par rapport à $\mathrm{H}\mathcal{V}$, ce qui donne

$$(11)\qquad \mathrm{H}\mathcal{V} = \sigma'(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots).$$

Il est alors facile de voir que l'on a

$$(12)\qquad \mathrm{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \lambda[\sigma'(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots), \alpha, \beta, \ldots],$$

ce qui démontre la proposition énoncée. L'importance de cette proposition réciproque apparaîtra dans un Chapitre ultérieur.

§ 3. — Équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$.

Nous avons vu que la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ satisfaisait, en tous les points de l'espace non situés sur la surface de séparation de deux corps magnétiques différents, ou d'un corps magnétique et d'un milieu non magnétique, à l'équation suivante [Livre VII, Chap. III, égalité (8)],

$$(13)\qquad \Delta\mathcal{V} = 4\pi\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right).$$

De là, on peut déduire la forme de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfait $\mathcal{V}$ en tous les points de l'espace, sauf aux divers points des surfaces limites.

1° Dans la partie de l'espace non occupée par les milieux magnétiques, l'équation précédente se réduit à l'équation de Laplace

$$(14)\qquad \Delta\mathcal{V} = 0.$$

2° A l'intérieur des aimants permanents, l'aimantation en chaque point est censée connue; en sorte que le second membre de l'équation (13) est une fonction connue de x, y, z. Si nous désignons cette fonction par $-4\pi\rho(x, y, z)$, la fonction $\mathcal{V}$ vérifiera, en tout point intérieur aux aimants permanents, l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(15)\qquad \Delta\mathcal{V} + 4\pi\rho(x, y, z) = 0.$$

3° Envisageons maintenant un point intérieur à l'un des corps parfaitement doux. En ce point, les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation sont données par les égalités (10). La première de ces

égalités, différentiée par rapport à x, donne

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} = \lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\Pi\mathcal{V}}\frac{\partial\Pi\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}$$
$$+\left[\frac{\partial\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \ldots\right]\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x},$$

les termes de la seconde ligne disparaissant d'eux-mêmes lorsque la substance est homogène.

Mais on a

$$\frac{\partial\Pi\mathcal{V}}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial z}\right).$$

Remplaçons $\frac{\partial\Pi\mathcal{V}}{\partial x}$ par cette valeur dans l'expression de $\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}$; formons de même $\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}$; ajoutons ces trois quantités en tenant compte de la relation (13), et nous aurons

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &[1 - 4\pi\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)]\,\Delta\mathcal{V} - 2\,\frac{\partial\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\Pi\mathcal{V}}\\ &\quad\times\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z^2}\right.\\ &\qquad\left. + 2\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial z} + 2\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial x} + 2\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y}\right]\\ &-\frac{\partial\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\alpha}\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right\| - \frac{\partial\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\beta}\left\|\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right\| - \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on se souvient de la signification de $\Pi\mathcal{V}$, on voit que l'on a ainsi une équation aux dérivées partielles du second ordre, de forme connue lorsqu'on connaît la fonction $\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)$, que doit vérifier la fonction $\mathcal{V}$ en tout point pris à l'intérieur d'un corps parfaitement doux.

Les équations (14), (15) et (16) représentent donc les équations aux dérivées partielles du second ordre que la fonction $\mathcal{V}$ doit vérifier dans les diverses régions de l'espace séparées les unes des autres par les surfaces limites.

§ 4. — Conditions aux limites auxquelles satisfait la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$.

Cherchons à quelles conditions satisfait la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ en un point de l'une des surfaces limites.

Supposons qu'une surface sépare deux milieux, dont l'un, au moins, soit magnétique. Soient, en un point de cette surface, N_1 la normale dirigée vers l'intérieur du premier milieu et N_2 la normale dirigée vers l'extérieur du second milieu. Soient $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ les composantes de l'aimantation au sein de chacun des deux milieux et au voisinage de ce point. Nous aurons [Livre VII, Chap. III, égalité (9)]

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_1}+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_2}\right)=\|\mathcal{A}_1\cos(N_1, x)\|+\|\mathcal{A}_2\cos(N_2, x)\|. \tag{17}$$

Les surfaces que l'on peut avoir à considérer sont de cinq espèces différentes :

1° Surface de séparation d'un aimant permanent et d'un milieu non magnétique ;

2° Surface de séparation de deux aimants permanents ;

3° Surface de séparation d'un corps parfaitement doux et d'un milieu non magnétique ;

4° Surface de séparation de deux substances dénuées de force coercitive ;

5° Surface de séparation d'une substance dénuée de force coercitive et d'un aimant permanent.

1° *A la surface de séparation d'un aimant permanent et d'un milieu non magnétique,* voyons ce que devient la relation (17). Supposons que l'indice 1 se rapporte à l'aimant et l'indice 2 au milieu. Remplaçons les symboles $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_1}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_2}$ par les symboles, plus souvent usités en pareil cas, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_i}$ et $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e}$. A l'intérieur du milieu non magnétique, nous avons

$$\mathcal{A}_2=0, \qquad \mathcal{B}_2=0, \qquad \mathcal{C}_2=0,$$

tandis qu'à l'intérieur de l'aimant les quantités $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ sont censées connues d'avance. La relation (17) devient donc

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_i}+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e}=-4\pi s(x, y, z), \tag{18}$$

$s(x, y, z)$ étant une fonction dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

2° De même, *à la surface de séparation de deux aimants,* la

relation (17) devient

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2} = -4\pi[s_1(x, y, z) + s_2(x, y, z)], \tag{19}$$

$s_1(x, y, z)$, $s_2(x, y, z)$ étant deux fonctions dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

3° *A la surface de séparation d'une substance dénuée de force coercitive et d'un milieu non magnétique,* examinons ce que devient la relation (17). Supposons que l'indice 1 se rapporte à la substance magnétique et l'indice 2 au milieu non magnétique. Remplaçons les symboles N_1, N_2 par les symboles N_i, N_e.

A l'intérieur du milieu non magnétique, nous avons

$$\mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{B}_2 = 0, \qquad \mathcal{C}_2 = 0.$$

Au contraire, à l'intérieur de la substance dénuée de force coercitive, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ sont donnés par les égalités (10). L'égalité (17) devient donc

$$[1 + 4\pi\lambda(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = 0. \tag{20}$$

4° De même, *à la surface de séparation de deux substances dénuées de force coercitive,* la relation (17) devient

$$[1 + 4\pi\lambda_1(\Pi\mathcal{V}, \alpha_1\, \beta_1, \ldots)]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1} + [1 + 4\pi\lambda_2(\Pi\mathcal{V}, \alpha_2, \beta_2, \ldots)]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2} = 0. \tag{21}$$

5° Enfin, *à la surface de séparation d'un aimant permanent* 1 *et d'un corps dénué de force coercitive* 2, la relation (17) devient

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1} + [1 + 4\pi\lambda_2(\Pi\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots)]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2} = -4\pi s_1(x, y, z), \tag{22}$$

$s_1(x, y, z)$ étant une fonction dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

Si nous ajoutons qu'à l'infini on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{c} \mathcal{V} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = 0, \end{array}\right. \tag{23}$$

nous aurons énoncé toutes les conditions aux limites qui achèvent de déterminer le problème de l'aimantation par influence.

§ 5. — Approximation de Poisson.

Nous avons vu [Chap. I, égalité (23)] que l'on avait

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}^2\varphi(\mathfrak{M}),$$

$\varphi(\mathfrak{M})$ ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $\mathfrak{M}$ tend vers 0. Pour les petites valeurs de $\mathfrak{M}$, nous pouvons écrire

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}^2\varphi(0). \tag{24}$$

L'égalité (5) du présent Chapitre

$$F(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}}}$$

devient alors

$$F(\mathfrak{M}) = \frac{1}{2\varphi(0)}.$$

Pour les petites valeurs de l'aimantation, la fonction magnétisante prend une valeur finie, indépendante de l'intensité d'aimantation.

Les égalités (6) deviennent alors

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{1}{2\varphi(0)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} &= -\frac{1}{2\varphi(0)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathcal{C} &= -\frac{1}{2\varphi(0)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Ces égalités concordent avec les conditions d'équilibre données par la théorie de Poisson [Livre VIII, Chap. I, égalités (1)], pourvu que l'on prenne pour coefficient d'aimantation la quantité

$$k = \frac{1}{2\varphi(0)}. \tag{26}$$

Ainsi *l'aimantation des corps faiblement aimantés est donnée par la théorie de Poisson.*

Les égalités (24) et (26) montrent, en outre, que, toutes les fois

que la théorie de Poisson est applicable, on a

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2k}. \tag{27}$$

Cette remarque sera pour nous d'un fréquent usage.

Moyennant cette remarque, l'expression (1) du potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des aimants devient

$$\mathcal{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta_q + \mathfrak{F} + \int \frac{\mathfrak{M}^2}{2k}\, dv. \tag{2}$$

Cette expression du potentiel thermodynamique interne est équivalente à celle qui a été souvent introduite dans les recherches sur les propriétés des aimants par des auteurs qui n'en ont ordinairement pas défini la nature et justifié l'origine [1].

---

[1] J. Stefan, *Ueber die Gesetze der elektrodynamischen Induction* (*Sitzungsberichte der Akad. der Wissenschaften zu Wien*, LXIV. 2ᵉ Abtheil, p. 193; 1871); *Zur Theorie der magnetischen Kräfte* (*Ibid.*, LXIX, 2ᵉ Abtheil, p. 165; 1874); *Ueber die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magnetischen und dielektrischen Medien, und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes* (*ibid.*, LXX, 2ᵉ Abtheil, p. 589; 1875). — W. Thomson, *General problem of magnetic induction* (*Reprint of papers on electrostatic and magnetism*, nᵒˢ 700 et seqq., 1872, 2ᵉ édition, p. 549). — *Voir* aussi les écrits de MM. E. Betti, Korteweg, von Helmholtz, Boltzmann, Adler, G. Kirchhoff, Carl Neumann et E. Beltrami.



CHAPITRE III.

LE PROBLÈME DE L'AIMANTATION PAR INFLUENCE ADMET UNE ET UNE SEULE SOLUTION.

§ 1. — Existence d'une solution.

Nous avons vu, au § 1 du Chapitre précédent, que le problème de l'aimantation par influence se ramenait à celui-ci : *Trouver une distribution magnétique qui rende minimum la quantité*

$$\mathcal{F}' = \mathfrak{F} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv, \tag{1}$$

l'intégration s'étendant à toutes les substances magnétiques.

Existe-t-il toujours une semblable distribution? C'est la question que nous nous proposons d'examiner.

Nous avons [Livre VII, Chap. III, égalité (17 *bis*)],

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{8\pi} \int \Pi \mathcal{V}\, du,$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace. L'égalité (1) peut donc s'écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{F}' = & \int \mathcal{F}_1(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv_1 \\ & + \frac{1}{8\pi} \int \Pi \mathcal{V}\, dv_1 + \frac{1}{8\pi} \int \Pi \mathcal{V}\, dv_3 \\ & + \int \left[\frac{\Pi \mathcal{V}}{8\pi} + \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) \right] dv_2, \end{aligned} \right.$$

les deux premières intégrales s'étendant à tous les éléments dv_1 du volume des aimants permanents, la troisième intégrale s'étendant à tous les éléments dv_3 de l'espace occupé par le milieu non

magnétique, la quatrième, enfin, s'étendant à tous les éléments dv_2 du volume des corps parfaitement doux.

La première intégrale a une valeur indépendante de la distribution qu'affecte le magnétisme sur les corps parfaitement doux. Quelles que soient les variations de cette distribution, elle garde une valeur constante C.

La deuxième et la troisième intégrale ont une valeur qui ne peut jamais devenir négative, quelle que soit la distribution du magnétisme sur les corps parfaitement doux.

De l'égalité (5) du Chapitre II, qui définit $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta \ldots)$, on déduit

$$(3) \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} d\mathfrak{M}.$$

Par conséquent, *la quantité $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ est toujours positive pour les corps magnétiques et toujours négative pour les corps diamagnétiques.*

Cette circonstance ne nous permet pas de prévoir le signe que prend, pour un corps diamagnétique, la quatrième intégrale figurant dans l'égalité (2); mais, pour les corps magnétiques, nous pouvons affirmer qu'elle n'est jamais négative, et, de plus, qu'elle n'est égale à o que si l'aimantation est égale à o en tout point.

Par conséquent, dans le cas où toutes les substances dénuées de force coercitive que renferme le système sont des corps magnétiques, l'égalité (2) revient à la suivante

$$\mathfrak{F}' = C + P,$$

C étant une quantité indépendante de la distribution que le magnétisme affecte sur les substances dénuées de force coercitive, et P une quantité qui ne peut jamais être négative, quelle que soit cette distribution.

Cette égalité nous prouve que la quantité $\mathfrak{F}'$ est une quantité dont les variations sont limitées inférieurement.

De là, pouvons-nous conclure qu'il existe au moins une distribution magnétique correspondant à une valeur de $\mathfrak{F}'$ plus petite que toutes les autres, et, par conséquent, à un état d'équilibre stable? En le faisant, nous ne ferions que suivre la voie tracée par Gauss pour démontrer qu'il existe un état d'équilibre électrique

sur les corps conducteurs (Livre II, Chap. II, § 2; Livre III, Chap. V, § 2). Mais nous savons que cette déduction présente un défaut de rigueur; car, de ce que les variations d'une quantité sont limitées inférieurement, il ne résulte pas que cette quantité présente un minimum. C'est donc sous une réserve semblable à celle qui pèse sur le principe de Dirichlet que nous énoncerons la proposition suivante :

Des corps magnétiques quelconques étant soumis à l'action d'aimants quelconques, on peut trouver sur ces corps au moins une distribution magnétique qui satisfait aux lois de l'aimantation par influence et qui demeure stable si l'on maintient invariables la position, la forme et l'état des divers corps du système.

§ 2. — Il n'existe, pour les corps magnétiques, qu'une seule solution au problème de l'aimantation par influence. — Elle correspond à une aimantation stable.

Les équations du problème de l'aimantation par influence expriment simplement l'égalité à o de la variation première subie par le potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ lorsque, en chaque point des substances dénuées de force coercitive que renferme le système, on fait varier les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation de quantités arbitraires $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$. Cette égalité à o de la variation première de $\mathcal{F}$ peut-elle avoir lieu pour plusieurs distributions magnétiques distinctes? Lorsqu'elle a lieu, la fonction $\mathcal{F}$ est-elle minimum, de telle façon que la distribution magnétique soit stable? Telles sont les questions que nous allons maintenant examiner.

La solution de ces questions découle de l'étude de la variation seconde de $\mathcal{F}$, dont nous allons d'abord former l'expression.

Supposons que, en chaque point (x, y, z) des masses dénuées de force coercitive que renferme le système, les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation varient de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, et posons

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= a\,\delta t, \\ \delta\mathcal{B} &= b\,\delta t, \\ \delta\mathcal{C} &= c\,\delta t, \end{aligned}$$

a, b, c étant trois fonctions finies de x, y, z, et δt une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z.

$\mathfrak{F}$ éprouve une variation première qui peut s'écrire

$$(4) \qquad \delta\mathfrak{F} = \delta\mathfrak{J} + \delta\int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv.$$

Si l'aimantation avait varié seulement dans l'élément dv_1, $\mathfrak{J}$ aurait subi une variation $\delta_1\mathfrak{J}$; si elle avait varié seulement dans l'élément dv_2, $\mathfrak{J}$ aurait subi une variation $\delta_2\mathfrak{J}$, ... et l'on a

$$(5) \qquad \delta\mathfrak{J} = \delta_1\mathfrak{J} + \delta_2\mathfrak{J} + \ldots + \delta_n\mathfrak{J},$$

dv_1, dv_2, ..., dv_n étant les éléments en lesquels se décomposent les masses dénuées de force coercitive.

L'égalité

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv + \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x'} \right\| dv',$$

dans laquelle la première intégration s'étend à tous les corps dénués de force coercitive et la seconde à tous les aimants permanents, nous donne

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \delta_1\mathfrak{J} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1}\delta\mathcal{A}_1 + \frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_1}\partial\mathcal{B}_1 + \frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_1}\delta\mathcal{C}_1\right) dv_1 \\ & + \frac{1}{2}\Bigg(\left\| \mathcal{A}_1\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \left\| \mathcal{A}_2\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \ldots + \left\| \mathcal{A}_n\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}_n}{\partial x_n} \right\| dv_n \\ & + \left\| \mathcal{A}'_1\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}'_1}{\partial x'_1} \right\| dv'_1 + \left\| \mathcal{A}'_2\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}'_2}{\partial x'_2} \right\| dv'_2 + \ldots + \left\| \mathcal{A}'_p\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}'_p}{\partial x'_p} \right\| dv'_p \Bigg); \end{aligned} \right.$$

dv'_1, dv'_2, ..., dv'_p sont les éléments en lesquels sont décomposés les aimants permanents; δ_1 désigne toujours une variation obtenue en changeant seulement de $\delta\mathcal{A}_1$, $\delta\mathcal{B}_1$, $\delta\mathcal{C}_1$ les composantes de l'aimantation dans l'élément dv_1.

Mais des calculs analogues à ceux qui, au Chapitre précédent, ont servi à établir l'égalité (3), nous prouveront :

1° Que l'on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1}\,\delta\mathcal{A}_1+\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_1}\,\delta\mathcal{B}_1+\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_1}\,\delta\mathcal{C}_1\\
&\quad=\left\|\mathcal{A}_1\,\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1}\right\|dv_1+\left\|\mathcal{A}_2\,\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2}\right\|dv_2+\ldots+\left\|\mathcal{A}_n\,\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}_n}{\partial x_n}\right\|dv_n\\
&\quad+\left\|\mathcal{A}'_1\,\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}'_1}{\partial x'_1}\right\|dv'_1+\left\|\mathcal{A}'_2\,\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}'_2}{\partial x'_2}\right\|dv'_2+\ldots+\left\|\mathcal{A}'_p\,\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}'_p}{\partial x'_p}\right\|dv'_p;
\end{aligned}$$

2° Que l'on a

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{A}_1\,\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_1}\right\|dv_1+\ldots+\left\|\mathcal{A}'_p\,\delta_1\frac{\partial\mathcal{V}'_p}{\partial x'_p}\right\|dv'_p\\
&\quad=\left\|\left\|\mathcal{A}_2\frac{\partial}{\partial x_1}\left\|\delta\mathcal{A}_1\frac{\partial\frac{1}{r_{12}}}{\partial x_2}\right\|\right\|\right\|dv_1\,dv_2+\ldots+\left\|\left\|\mathcal{A}_n\frac{\partial}{\partial x_1}\left\|\delta\mathcal{A}_1\frac{\partial\frac{1}{r_{1n}}}{\partial x_n}\right\|\right\|\right\|dv_1\,dv'_n\\
&\quad+\left\|\left\|\mathcal{A}'_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left\|\delta\mathcal{A}_1\frac{\partial\frac{1}{r'_{12}}}{\partial x'_1}\right\|\right\|\right\|dv_1\,dv'_1+\ldots+\left\|\left\|\mathcal{A}'_p\frac{\partial}{\partial x_1}\left\|\delta\mathcal{A}_1\frac{\partial\frac{1}{r'_{1p}}}{\partial x'_p}\right\|\right\|\right\|dv_1\,dv'_p.
\end{aligned}$$

Le second membre de cette dernière égalité peut encore s'écrire, en se souvenant que

$$\delta\mathcal{A}_1=a_1\,\delta t,\qquad \delta\mathcal{B}_1=b_1\,\delta t,\qquad \delta\mathcal{C}_1=c_1\,\delta t,$$

$$\begin{aligned}
&\left(\left\|\left\|\mathcal{A}_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left\|a_1\frac{\partial\frac{1}{r_{12}}}{\partial x_1}\,dv_1\right\|\right\|\right\|+\ldots+\left\|\left\|\mathcal{A}_n\frac{\partial}{\partial x_n}\left\|a_1\frac{\partial\frac{1}{r_{12}}}{\partial x_1}\,dv_1\right\|\right\|\right\|\right.\\
&\quad\left.+\left\|\left\|\mathcal{A}'_1\frac{\partial}{\partial x'_1}\left\|a_1\frac{\partial\frac{1}{r'_{11}}}{\partial x_1}\,dv_1\right\|\right\|\right\|+\ldots+\left\|\left\|\mathcal{A}'_p\frac{\partial}{\partial x'_p}\left\|a_1\frac{\partial\frac{1}{r'_{1p}}}{\partial x_1}\,dv_1\right\|\right\|\right\|\right)\delta t.
\end{aligned}$$

L'ensemble de ces calculs transforme l'égalité (6) en

$$\delta_1\mathcal{F}=\left(\left\|\left\|\mathcal{A}_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left\|a_1\frac{\partial\frac{1}{r_{12}}}{\partial x_1}\,dv_1\right\|\right\|\right\|+\ldots+\left\|\left\|\mathcal{A}'_p\frac{\partial}{\partial x'_p}\left\|a_1\frac{\partial\frac{1}{r'_{1p}}}{\partial x_1}\,dv_1\right\|\right\|\right\|\right)\delta t;$$

$\delta_2\mathcal{F}$, ..., $\delta_n\mathcal{F}$ ont des expressions analogues. Nous pourrons donc

remplacer l'égalité (5) par la suivante

$$\delta\mathfrak{T} = \delta t \left\{ \left\| \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left\| a_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \left\| a_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial x_3} \right\| dv_3 + \ldots + \left\| a_n \frac{\partial \frac{1}{r_{1n}}}{\partial x_n} \right\| dv_n \right) \right\| dv_1 \right.$$
$$+ \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left\| a_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{21}}}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \left\| a_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{23}}}{\partial x_3} \right\| dv_3 + \ldots + \left\| a_n \frac{\partial \frac{1}{r_{2n}}}{\partial x_n} \right\| dv_n \right) \right\| dv_2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \left\| \mathcal{A}'_p \frac{\partial}{\partial x'_p}\left(\left\| a_1 \frac{\partial \frac{1}{r'_{p1}}}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \left\| a_2 \frac{\partial \frac{1}{r'_{p2}}}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \ldots + \left\| a_n \frac{\partial \frac{1}{r'_{pn}}}{\partial x_n} \right\| dv_n \right) \right\| dv'_p \right\}.$$

Supposons que, sur le corps parfaitement doux, on distribue une aimantation dont les composantes au point (x, y, z) aient des valeurs a, b, c. Soit Ω la fonction potentielle magnétique de cette distribution, fonction définie par l'égalité

$$\Omega = \int \left\| a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right\| dv. \tag{7}$$

On voit sans peine que l'égalité précédente peut s'écrire

$$\delta\mathfrak{T} = \left(\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right\| dv + \int \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \Omega}{\partial x'} \right\| dv' \right) \delta t. \tag{8}$$

D'autre part, on a

$$\delta \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \delta\mathfrak{M},$$

ou bien, en vertu de l'égalité [Chapitre II, égalité (5)]

$$F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}},$$

$$\delta \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} \delta\mathfrak{M}. \tag{9}$$

On peut donc, en vertu des égalités (4), (8) et (9), écrire

$$\text{(10)} \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\mathfrak{F} = & \int \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} \delta\mathfrak{M}\, dv \\ & + \left(\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right\| dv + \int \left\| \mathcal{A}' \frac{\partial \Omega}{\partial x'} \right\| dv' \right) \delta t. \end{aligned} \right.$$

Donnons de nouveau à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les variations

$$\delta\mathcal{A} = a\,\delta t, \qquad \delta\mathcal{B} = b\,\delta t, \qquad \delta\mathcal{C} = c\,\delta t,$$

et cherchons la variation $\delta^2\mathcal{F}$ subie par $\delta\mathcal{F}$.

Nous aurons

$$\delta\int\left\|\mathcal{A}'\frac{\partial\Omega}{\partial x'}\right\|dv' = 0 \tag{11}$$

et

$$\delta\int\left\|\mathcal{A}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\|dv = \delta t\int\left\|a\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\|dv.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire, en désignant par du un élément quelconque de l'espace extérieur au corps parfaitement doux

$$\delta\int\left\|\mathcal{A}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\|dv = \frac{\delta t}{8\pi}\left(\int\Pi\Omega\,dv + \int\Pi\Omega\,du\right). \tag{12}$$

D'ailleurs

$$\left\{\begin{aligned}
&\delta\left[\frac{\mathcal{M}}{F(\mathcal{M},\alpha,\beta,\ldots)}\delta\mathcal{M}\right]\\
&\quad= \frac{\mathcal{M}}{F(\mathcal{M},\alpha,\beta,\ldots)}\delta^2\mathcal{M}\\
&\qquad+\left\{\frac{1}{F(\mathcal{M},\alpha,\beta,\ldots)} - \frac{\mathcal{M}}{[F(\mathcal{M},\alpha,\beta,\ldots)]^2}\,\frac{\partial F(\mathcal{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathcal{M}}\right\}(\delta\mathcal{M})^2.
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Mais l'égalité

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2$$

nous donne, en premier lieu,

$$\delta\mathcal{M} = \frac{\mathcal{A}a + \mathcal{B}b + \mathcal{C}c}{\mathcal{M}}\delta t \tag{14}$$

et, en second lieu,

$$\delta^2\mathcal{M} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\mathcal{M}}\delta t^2 - \frac{\mathcal{A}a + \mathcal{B}b + \mathcal{C}c}{\mathcal{M}^2}\delta\mathcal{M}\,\delta t,$$

ou bien, en posant

$$\delta\mathcal{M} = m\,\delta t$$

et en tenant compte de l'égalité (14),

$$\delta^2\mathcal{M} = \frac{a^2+b^2+c^2-m^2}{\mathcal{M}}\delta t.$$

L'égalité (13) devient donc

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}\delta\mathfrak{M}\right] \\ &\quad = \left\{\frac{a^2+b^2+c^2}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} - \frac{\mathfrak{M}\dfrac{\partial F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}}{[F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)]^2} m^2\right\}\delta t^2. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (10), (11), (12) et (15) donnent alors

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2\mathfrak{F} = {}& \frac{\delta t^2}{8\pi}\int \Pi\Omega\, du \\ & + \delta t^2 \int \left\{\frac{\Pi\Omega}{8\pi} + \frac{a^2+b^2+c^2}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} - \frac{\mathfrak{M}\dfrac{\partial F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)]^2} m^2\right\} dv. \end{aligned}\right.$$

Cette expression peut encore se transformer.

L'égalité (14) nous donne

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^2 m^2 &= (\mathcal{A} a + \mathcal{B} b + \mathcal{C} c)^2 \\ &= (\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2)(a^2+b^2+c^2) \\ &\quad - (\mathcal{B} c - \mathcal{C} b)^2 - (\mathcal{C} a - \mathcal{A} c)^2 - (\mathcal{A} b - \mathcal{B} a)^2 \end{aligned}$$

ou bien

$$(17)\quad m^2 = a^2+b^2+c^2 - \frac{(\mathcal{B} c - \mathcal{C} b)^2 + (\mathcal{C} a - \mathcal{A} c)^2 + (\mathcal{A} b - \mathcal{B} a)^2}{\mathfrak{M}^2}.$$

Dès lors, l'égalité (16) peut s'écrire

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2\mathfrak{F} = {}& \frac{\delta t^2}{8\pi}\left(\int \Pi\Omega\, du + \int \Pi\Omega\, dv\right) \\ & + \delta t^2 \int \left\{\frac{\partial}{\partial\mathfrak{M}}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}\right](a^2+b^2+c^2) \right. \\ & \left. - \frac{\mathfrak{M}\dfrac{\partial F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}}{[F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)]^2}\, \frac{(\mathcal{B} c - \mathcal{C} b)^2 + (\mathcal{C} a - \mathcal{A} c)^2 + (\mathcal{A} b - \mathcal{B} a)^2}{\mathfrak{M}^2}\right\} dv. \end{aligned}\right.$$

Discutons le signe de cette quantité $\delta^2\mathfrak{F}$, en nous bornant au cas des *corps magnétiques*.

Le terme qui commence le second membre de l'égalité (18) est assurément positif ou nul; il ne peut jamais être négatif.

Pour les corps magnétiques, la quantité $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ est positive; en général, cette quantité décroît lorsque $\mathfrak{M}$ augmente; on est alors assuré que la quantité $\delta^2\mathfrak{F}$, donnée soit par l'éga-

lité (16), soit par l'égalité (18), est positive, à moins que l'on n'ait, en tout point,

$$a = b = c = 0.$$

Pour certains corps magnétiques tels que le fer doux, $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ croît avec $\mathfrak{M}$ pour les faibles valeurs de $\mathfrak{M}$; mais les accroissements de cette quantité ne sont pas extrêmement grands, et, comme $\mathfrak{M}$ a en même temps de petites valeurs, la quantité

$$\frac{\mathfrak{M}\dfrac{\partial F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}}{[F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)]^2} \frac{(\mathfrak{B}c - \mathfrak{C}b)^2 + (\mathfrak{C}a - \mathfrak{A}c)^2 + (\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a)^2}{\mathfrak{M}^2}$$

a une valeur beaucoup plus faible que

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{M}} \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} \right] (a^2 + b^2 + c^2),$$

en sorte que $\delta^2 \mathcal{F}$ est encore positif.

On peut donc dire que, *pour tous les corps magnétiques connus, $\delta^2 \mathcal{F}$ est toujours positif.*

De là cette première conséquence :

Si des corps magnétiques sont placés en présence d'aimants permanents, toute distribution magnétique répandue sur ces corps, conformément aux lois indiquées au Chapitre précédent, correspond à un état d'équilibre stable.

De plus, $\delta^2 \mathcal{F}$ étant toujours fini et positif, on voit qu'il ne peut exister deux distributions magnétiques distinctes telles que

$$\delta \mathcal{F} = 0.$$

Donc, *sur de semblables corps magnétiques, il ne peut exister plus d'une distribution d'équilibre.*



CHAPITRE IV.

QUELQUES THÉOREMES SUR L'AIMANTATION DES CORPS MAGNÉTIQUES.

---

§ 1. — Les corps parfaitement doux ne présentent pas de magnétisme rémanent.

Avant d'aborder l'étude des corps diamagnétiques, nous allons déduire, pour les corps magnétiques, quelques conséquences des propositions précédentes, et particulièrement de la dernière : *Il n'existe qu'une seule distribution magnétique convenant à l'équilibre sur un corps magnétique parfaitement doux soumis à l'action d'aimants permanents.*

Soient $\mathcal{W}$ la fonction potentielle magnétique qui définit le champ dans lequel le corps est placé et $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de l'aimantation distribuée sur ce corps. Les équations de l'équilibre magnétique seront les suivantes :

$$\mathcal{A} = -\,F(\mathcal{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}\right),$$

$$\mathcal{B} = -\,F(\mathcal{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y}\right),$$

$$\mathcal{C} = -\,F(\mathcal{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\right).$$

Supposons, en particulier, le corps parfaitement doux placé dans un champ magnétique dont l'intensité soit nulle en tout point. Nous aurons identiquement

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} = 0,$$

et les équations précédentes deviendront

$$\mathcal{A} = -F(\mathfrak{M}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x},$$

$$\mathcal{B} = -F(\mathfrak{M}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y},$$

$$\mathcal{C} = -F(\mathfrak{M}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}.$$

Observons maintenant :

1° Que la fonction $\mathcal{V}$ devient identiquement nulle si l'on a, en tout point,

$$\mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{B} = 0, \qquad \mathcal{C} = 0;$$

2° Que la fonction $F(\mathfrak{M})$ ne croît pas au delà de toute limite lorsque $\mathfrak{M}$ tend vers 0.

Nous verrons alors que les équations précédentes sont satisfaites si l'on a

$$\mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{B} = 0, \qquad \mathcal{C} = 0.$$

Comme il existe une seule distribution magnétique satisfaisant à ces équations, cette distribution est connue.

Ainsi : *un corps magnétique parfaitement doux étant placé dans un champ magnétique dont l'intensité est nulle en tout point ne présente aucune aimantation*. En d'autres termes, *un corps magnétique parfaitement doux ne présente pas de magnétisme rémanent.*

§ 2. — Corps qui s'aimantent uniformément dans un champ uniforme.

Il est d'une grande importance, pour l'étude de l'aimantation par influence, de connaître la fonction

$$F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$$

ou, ce qui revient au même (Chap. II, § 2), la fonction

$$\lambda(\text{H}\mathcal{V}, \alpha, \beta, \ldots).$$

Nous allons voir ici sur quels principes on en peut fonder la détermination.

Prenons un corps homogène, auquel correspond une fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$. Plaçons-le dans un champ magnétique où il

s'aimante uniformément. L'intensité d'aimantation a alors une valeur M indépendante de x, y, z.

Les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation vérifient les égalités

$$\mathcal{A} = -\mathrm{F}(\mathrm{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}\right),$$

$$\mathcal{B} = -\mathrm{F}(\mathrm{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y}\right),$$

$$\mathcal{C} = -\mathrm{F}(\mathrm{M})\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\right).$$

F(M) est, comme M, une quantité indépendante de x, y, z. Or ces équations ne sont autre chose que les équations qui définissent la distribution d'équilibre prise, dans le champ considéré, par un corps de même forme que celui que l'on étudie et ayant un coefficient d'aimantation constant k, dont la valeur serait précisément égale à F(M). Si l'on se souvient que ces dernières équations déterminent une distribution unique, on arrive au théorème suivant :

Si un corps homogène, possédant une fonction magnétisante déterminée $\mathrm{F}(\mathcal{M})$, *s'aimante uniformément dans un champ déterminé, de manière que son aimantation ait en chaque point l'intensité* M, *un corps de même forme, placé dans le même champ et ayant un coefficient d'aimantation constant* k, *donné par l'égalité*

$$k = \mathrm{F}(\mathrm{M}),$$

s'aimantera de la même manière.

A ce théorème correspond une réciproque, bien importante pour l'objet de nos recherches. Cette réciproque, qui se démontre comme le théorème précédent, s'énonce ainsi :

Imaginons un champ magnétique et un corps magnétique qui, dans ce champ, s'aimante uniformément, quelle que soit la valeur k *du coefficient d'aimantation constant qu'on lui attribue. L'intensité d'aimantation* $\mathcal{M}$ *qu'il prend alors est liée à* k *par la relation*

$$(1) \qquad \mathcal{M} = \psi(k).$$

Si l'on attribue à ce corps une fonction magnétisante quel-

conque $F(\mathfrak{M})$, *variable avec l'intensité d'aimantation, il s'aimante encore uniformément, et son aimantation est la même que s'il avait un coefficient d'aimantation constant défini par l'égalité*

$$(2) \qquad F[\psi(k)] - k = 0.$$

Une sphère, un ellipsoïde, placés dans un champ magnétique uniforme, s'aimantent uniformément quel que soit leur coefficient d'aimantation. Le théorème précédent peut donc s'appliquer à ces corps.

Proposons-nous, par exemple, de trouver l'aimantation prise par un ellipsoïde dont la fonction magnétisante est $F(\mathfrak{M})$ dans un champ magnétique uniforme, dont la fonction potentielle est

$$(3) \qquad \mathfrak{V} = -Fx - Gy - Hz - K,$$

F, G, H, K étant quatre constantes.

Si l'ellipsoïde a un coefficient d'aimantation k, les composantes de l'aimantation sont données par les égalités [Livre VIII, Chap. II, égalités (11)],

$$\mathfrak{A} = \frac{k}{1 + 2k\lambda} F,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{k}{1 + 2k\mu} G,$$

$$\mathfrak{C} = \frac{k}{1 + 2k\nu} H,$$

λ, μ, ν étant trois constantes qui dépendent de la forme de l'ellipsoïde. On déduit de là

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = k^2 \left[\frac{F^2}{(1 + 2k\lambda)^2} + \frac{G^2}{(1 + 2k\mu)^2} + \frac{H^2}{(1 + 2k\nu)^2}\right].$$

La fonction $\psi(k)$ est donc définie ici par l'égalité

$$(4) \qquad \psi(k) = k\left[\frac{F^2}{(1 + 2k\lambda)^2} + \frac{G^2}{(1 + 2k\mu)^2} + \frac{H^2}{(1 + 2k\nu)^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

et l'on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{F(\mathfrak{M})}{1 + 2\lambda F(\mathfrak{M})} F, \\ \mathfrak{B} = \dfrac{F(\mathfrak{M})}{1 + 2\mu F(\mathfrak{M})} G, \\ \mathfrak{C} = \dfrac{F(\mathfrak{M})}{1 + 2\nu F(\mathfrak{M})} H, \end{cases}$$

avec

$$(5\ bis)\quad \mathfrak{M} = F(\mathfrak{M})\left\{\frac{F^2}{[1+2\lambda F(\mathfrak{M})]^2}+\frac{G^2}{[1+2\mu F(\mathfrak{M})]^2}+\frac{H^2}{[1+2\nu F(\mathfrak{M})]^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Les équations (5) et (5 *bis*) nous détermineront l'aimantation de l'ellipsoïde lorsqu'on connaîtra la forme de la fonction $F(\mathfrak{M})$. En effet, l'égalité (5 *bis*), résolue par rapport à $\mathfrak{M}$, nous fera connaître en fonction de F, G, H la valeur de l'intensité d'aimantation prise par l'ellipsoïde. Cette valeur de $\mathfrak{M}$ une fois connue, on calculera la valeur correspondante de $F(\mathfrak{M})$, et les égalités (5) feront alors connaître les composantes de l'aimantation en chaque point.

Le volume de l'ellipsoïde sera

$$\frac{4}{3}\pi abc,$$

a, b, c étant les trois demi-axes. Les composantes du moment magnétique auront alors pour valeur

$$(6)\quad \begin{cases} A = \dfrac{4}{3}\pi abc\,\dfrac{F(\mathfrak{M})}{1+2\lambda F(\mathfrak{M})}\,F, \\ B = \dfrac{4}{3}\pi abc\,\dfrac{F(\mathfrak{M})}{1+2\mu F(\mathfrak{M})}\,G, \\ C = \dfrac{4}{3}\pi abc\,\dfrac{F(\mathfrak{M})}{1+2\nu F(\mathfrak{M})}\,H. \end{cases}$$

En un point extérieur à l'ellipsoïde, la fonction potentielle magnétique de ce corps aura pour expression [Livre VIII, Chap. II, égalité (9)],

$$(7)\quad \mathcal{V}(x,y,z) = \frac{2F(\mathfrak{M})LFx}{1+2\lambda F(\mathfrak{M})}+\frac{2F(\mathfrak{M})MGy}{1+2\mu F(\mathfrak{M})}+\frac{2F(\mathfrak{M})NHz}{1+2\nu F(\mathfrak{M})},$$

L, M, N étant trois fonctions de x, y, z.

Pour une sphère de rayon R, on a

$$a = b = c = R,$$

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{3}\pi,$$

$$L = M = N = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les égalités précédentes deviennent donc

$$(8)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{F(\mathfrak{M})}{1+\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})} F, \\[2ex] \mathcal{B} = \dfrac{F(\mathfrak{M})}{1+\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})} G, \\[2ex] \mathcal{C} = \dfrac{F(\mathfrak{M})}{1+\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})} H; \end{cases}$$

$$(8\ bis)\quad \mathfrak{M} = \frac{F(\mathfrak{M})}{1+\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})}(F^2+G^2+H^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$(9)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})}{1+\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})} R^3 F, \\[2ex] B = \dfrac{\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})}{1+\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})} R^3 G, \\[2ex] C = \dfrac{\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})}{1+\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})} R^3 H; \end{cases}$$

$$(10)\quad \mathcal{V}(x, y, z) = \frac{\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})}{1+\frac{4}{3}\pi F(\mathfrak{M})}\,\frac{R^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(Fx+Gy+Hz).$$

Cette dernière égalité permet de montrer que la méthode indiquée au Livre VIII, Chapitre II, § 4, pour déterminer l'inclinaison magnétique par les déviations qu'une sphère de fer doux fait subir à une aiguille de déclinaison, demeure légitime, même si l'on admet que le fer doux, au lieu de présenter un coefficient d'aimantation constant, présente une fonction magnétisante variable avec l'intensité d'aimantation. Il faut seulement, pour que cette méthode donne des résultats exacts, que la sphère soit homogène et, condition plus difficile à réaliser, que le fer qui la constitue soit parfaitement doux.

Cette formule permet encore, par la méthode indiquée au Livre VIII, Chapitre II, § 3, de déterminer la valeur particulière que prend $F(\mathfrak{M})$ pour une sphère de fer doux placée dans le champ magnétique terrestre; cette valeur une fois connue, l'égalité (8 *bis*) fournit la valeur correspondante de la variable $\mathfrak{M}$.

§ 3. — Détermination de la fonction magnétisante. — Saturation.

La méthode précédente ne fait connaître qu'une valeur particulière de la fonction $F(\mathfrak{M})$, tandis qu'il serait d'un haut intérêt de connaître les valeurs de cette fonction pour un grand nombre de valeurs de la variable. On peut y parvenir de la manière suivante :

Un ellipsoïde est soumis à l'action d'un champ uniforme, d'intensité variable F, dirigée suivant son grand axe. Cet ellipsoïde prend un moment magnétique, dirigé aussi suivant son grand axe, et dont la grandeur est déterminée par la première des égalités (9). La mesure de ce moment magnétique fait connaître $F(\mathfrak{M})$; la valeur correspondante de $\mathfrak{M}$ est donnée par l'égalité (8 *bis*).

Des mesures de ce genre ont été effectuées par W. Weber (1). Un barreau cylindrique, que l'on peut assimiler à un ellipsoïde très allongé, est placé à l'intérieur d'une spirale parcourue par un courant qui engendre un champ uniforme (2); l'appareil agit sur un magnétomètre soumis à l'action d'une seconde spirale qui compense l'effet de la première.

Des expériences de W. Weber, G. Kirchhoff (3) a déduit les valeurs de $F(\mathfrak{M})$ en fonction de $\mathfrak{M}$, ou plutôt les valeurs de $\lambda(\Pi\mathcal{V})$ en fonction de $(\Pi\mathcal{V})^{\frac{1}{2}}$. Voici les résultats de ce calcul, en unités C.G.S. On a posé, pour abréger,

$$u = 10^4(\Pi\mathcal{V})^{\frac{1}{2}}.$$

---

(1) W. WEBER, *Elektrodynamische Maasbestimmungen*, p. 529.

(2) *Voir* Livre XV, Chapitre VII, § 1.

(3) G. KIRCHHOFF, *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* (*Journal de Crelle*, Bd. XLVIII, p. 348; 1854. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 221).

N°s.	u.	$\lambda(u)$.	N°s.	u.	$\lambda(u)$.
1..........	301	−23,5	8.........	2484	− 5,6
2..........	823	−13,5	9.........	1975	− 6,7
3..........	1184	−10,2	10.........	1583	− 8,1
4..........	1512	− 8,4	11.........	1297	− 9,5
5..........	1773	− 7,4	12.........	967	−12,0
6..........	2080	− 6,4	13.........	612	−16,9
7..........	2397	− 5,7	14.........	296	−25,0

Pour le champ magnétique terrestre, on aurait

$$u = 1,78.$$

On voit, par les résultats expérimentaux que nous venons de rapporter, que $\lambda(\Pi\mathfrak{F})$ décroît rapidement en valeur absolue lorsque $\Pi\mathfrak{F}$ croît au delà de toutes limites. D'après G. Kirchhoff, on peut écrire

$$(11) \qquad -\lambda(\Pi\mathfrak{F}) = \frac{p(\Pi\mathfrak{F})}{(\Pi\mathfrak{F})^{\frac{1}{2}}},$$

la fonction $p(\Pi\mathfrak{F})$ tendant vers une limite finie et positive P lorsque $\Pi\mathfrak{F}$ croît au delà de toute limite.

S'il en est ainsi, on peut démontrer la proposition suivante :

Si une masse de fer doux de forme quelconque est placée dans un champ magnétique dont l'intensité croît au delà de toute limite, l'intensité de cette aimantation tend vers une limite P *qui dépend exclusivement de la nature du fer doux; de plus, la direction limite de l'aimantation coïncide avec la direction du champ.*

Dans ces conditions, la masse de fer doux est dite *saturée*.

Les équations de l'équilibre magnétique sont, en effet,

$$\mathcal{A} = \lambda(\Pi\mathfrak{F})\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x},$$

$$\mathcal{B} = \lambda(\Pi\mathfrak{F})\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y},$$

$$\mathcal{C} = \lambda(\Pi\mathfrak{F})\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}.$$

Soient $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de la masse de fer doux et $\mathcal{W}$ la fonction potentielle magnétique du champ. D'après

l'égalité (11), les égalités précédentes pourront s'écrire

$$(12)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -p(\Pi\mho)\left[\dfrac{1}{(\Pi\mho)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial\mho}{\partial x} + \dfrac{1}{(\Pi\mho)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial\wp}{\partial x}\right], \\ \mathcal{B} = -p(\Pi\mho)\left[\dfrac{1}{(\Pi\mho)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial\mho}{\partial y} + \dfrac{1}{(\Pi\mho)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial\wp}{\partial y}\right], \\ \mathcal{C} = -p(\Pi\mho)\left[\dfrac{1}{(\Pi\mho)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial\mho}{\partial z} + \dfrac{1}{(\Pi\mho)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial\wp}{\partial z}\right]. \end{cases}$$

Posons

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{\dfrac{\partial\wp}{\partial x}}{(\Pi\wp)^{\frac{1}{2}}}, \\ \beta = -\dfrac{\dfrac{\partial\wp}{\partial y}}{(\Pi\wp)^{\frac{1}{2}}}, \\ \gamma = -\dfrac{\dfrac{\partial\wp}{\partial z}}{(\Pi\wp)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Imaginons que l'une au moins des quantités $\frac{\partial\wp}{\partial x}$, $\frac{\partial\wp}{\partial y}$, $\frac{\partial\wp}{\partial z}$ croisse au delà de toute limite, mais que chacune des trois quantités α, β, γ tende vers une limite finie. L'intensité du champ croîtra au delà de toute limite, mais sa direction limite sera déterminée; ses cosinus directeurs seront les limites a, b, c des quantités α, β, γ définies par les égalités (13).

Il est facile de voir que, si l'on suppose infinie l'une au moins des quantités $\frac{\partial\wp}{\partial x}$, $\frac{\partial\wp}{\partial y}$, $\frac{\partial\wp}{\partial z}$, les égalités (12) seront vérifiées en posant

$$(14)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = P\alpha, \\ \mathcal{B} = P\beta, \\ \mathcal{C} = P\gamma, \end{cases}$$

ce qui démontrera la proposition énoncée.

En effet, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ tendant, d'après ces égalités (14), vers des limites finies, il en sera de même de $\frac{\partial\mho}{\partial x}$, $\frac{\partial\mho}{\partial y}$, $\frac{\partial\mho}{\partial z}$; la quantité $\Pi\mho$ croîtra au delà de toute limite, et son rapport à $\Pi\wp$ tendra vers l'unité; enfin $p(\Pi\mho)$ tendra vers P. Les égalités (12) seront donc vérifiées.

Ce théorème qui, comme tous ceux qui ont été développés dans ce Chapitre, est dû à G. Kirchhoff, explique le phénomène de la saturation que nous avions rencontré au début de ce Livre IX comme une grave objection à la théorie de Poisson.

Nous venons de voir que, pour les grandes valeurs de $(\Pi\Omega)^{\frac{1}{2}}$, la fonction $\lambda(\Pi\Omega)$ relative au fer doux tend vers o comme $\frac{P}{(\Pi\Omega)^{\frac{1}{2}}}$; pour les faibles valeurs de $(\Pi\Omega)^{\frac{1}{2}}$, cette quantité a, au contraire, une valeur absolue croissante. Lord Rayleigh [1] a trouvé que, pour ces faibles valeurs de $(\Pi\Omega)^{\frac{1}{2}}$, la fonction $\lambda(\Pi\Omega)$, relative à un fer de Suède recuit, pouvait être représentée par une expression de la forme

$$\lambda(\Pi\Omega) = -\left[6,4 + 5,12(\Pi\Omega)^{\frac{1}{2}}\right].$$

M. Paul Janet [2] a trouvé, par une méthode différente, pour un autre fer doux,

$$\lambda(\Pi\Omega) = -\left[6,3 + 3,9(\Pi\Omega)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Ces résultats montrent que la fonction $F(\mathfrak{M})$ croît tout d'abord avec $\mathfrak{M}$, lorsque $\mathfrak{M}$ part de o, passe par un maximum, puis décroît et tend vers o comme $\frac{1}{\mathfrak{M} - P}$ lorsque $\mathfrak{M}$ tend vers B.

Récemment, M. E. Beltrami [3] a proposé, pour la fonction $\lambda(\Pi\Omega)$ relative aux grandes valeurs de $\Pi\Omega$, la forme suivante :

$$\lambda(\Pi\Omega) = \frac{PK}{\sqrt{P^2 + K^2 . \Pi\Omega}},$$

P étant l'intensité d'aimantation maxima et K une constante. Cette formule, d'après les calculs de M. P. Pizetti, représente très exactement les résultats des expériences de W. Weber, si l'on y fait

$$P = 13135,2 \pm 203,9, \qquad K = 29,0369 \pm 0,55.$$

[1] Lord Rayleigh, *Philos. Magazine*, t. XXIII, p. 225; 1887.

[2] Paul Janet, *Étude théorique et expérimentale sur l'aimantation transversale des conducteurs magnétiques*, p. 83.

[3] Eugenio Beltrami, *Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo* (*Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, série V, t. I; 1891).



CHAPITRE V.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UNE MASSE MAGNÉTIQUE EN PRÉSENCE D'AIMANTS PERMANENTS.

§ 1. — Équations générales du mouvement d'un corps parfaitement doux.

Considérons un système formé par des aimants permanents, que nous désignerons par l'indice 1, et par un corps parfaitement doux que nous désignerons par l'indice 2. Proposons-nous de déterminer les lois du mouvement du corps 2, ou, en d'autres termes, de chercher les forces qui agissent sur le corps 2.

Ce corps 2 peut être quelconque : solide ou fluide, compressible ou non ; il est seulement assujetti à porter à chaque instant la distribution magnétique qui convient à l'équilibre; en sorte qu'à chaque instant, on doit avoir, en tout point (x_2, y_2, z_2) du corps 2,

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_2 = -F(\mathfrak{M}_2, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2}, \\ \mathcal{B}_2 = -F(\mathfrak{M}_2, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2}, \\ \mathcal{C}_2 = -F(\mathfrak{M}_2, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2}, \end{cases}$$

$\mathcal{V}$ étant la fonction potentielle magnétique de tout le système.

Cela étant, cherchons quelles forces extérieures il faut appliquer au corps 2 pour le maintenir en équilibre; les forces qui agissent sur le corps 2 seront les forces capables de faire équilibre à celles-là. Si nous savons déterminer les premières, nous connaîtrons par cela même les dernières.

Soit $\mathcal{F}$ le potentiel thermodynamique interne du système; soit $\delta\mathcal{F}$ la variation qu'il éprouve lorsque l'on imprime aux divers

points du corps 2 un petit déplacement, accompagné de petites variations d'aimantation telles que les équations (1) demeurent vérifiées.

Soit $\delta\mathfrak{E}$ le travail effectué, dans le déplacement considéré, par les forces extérieures appliquées au corps 2. Si ces forces maintiennent le corps 2 en équilibre, la modification infiniment petite que nous venons de considérer sera réversible, et l'on aura

$$\delta\mathfrak{E} - \delta\mathfrak{F} = 0.$$

Les forces extérieures qu'il faut appliquer au corps 2 pour le maintenir en équilibre effectuent, dans tout déplacement virtuel du corps parfaitement doux, un travail égal à la *variation totale* de $\mathfrak{F}$. Ces forces sont destinées à faire équilibre aux forces qui agissent sur le corps 2. *Les forces qui agissent sur le corps parfaitement doux 2 ont donc pour potentiel le potentiel thermodynamique interne du système.*

Parmi ces forces, celles que l'on peut regarder comme d'origine magnétique auront pour potentiel la quantité

$$(2) \qquad \mathfrak{F}' = \mathfrak{I} + \int \mathfrak{F}_1(\mathfrak{M}_1)\, dv_1 + \int \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2.$$

L'aimantation des aimants permanents ne subissant aucune variation, la quantité

$$\int \mathfrak{F}_1(\mathfrak{M}_1)\, dv_1$$

demeure invariable durant les déplacements que l'on peut imposer au corps 2.

Soient $\mathfrak{V}_1$ la fonction potentielle magnétique du corps 1 et $\mathfrak{V}_2$ la fonction potentielle magnétique du corps 2. Nous aurons

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2}\int \left\| \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \int \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \frac{1}{2}\int \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2.$$

Le terme

$$\frac{1}{2}\int \left\| \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1$$

ne varie pas dans les déplacements et déformations imposés au corps 2.

Si l'on remarque alors que l'on peut retrancher du potentiel des forces qui agissent sur le corps 2 les termes que les déplace-

ments et déformations du corps 2 laissent invariables, on voit que l'on pourra remplacer l'expression (2) de ce potentiel par l'expression

$$(3)\qquad \mathfrak{F}'' = \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \frac{1}{2} \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \int \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2.$$

Dans le cas où le corps 2 s'aimante conformément à la théorie de Poisson, on a, en désignant par k_2 son coefficient d'aimantation [Chap. II, égalité (27)],

$$\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2k_2},$$

et l'égalité précédente devient [1]

$$(4)\qquad \mathfrak{F}'' = \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \frac{1}{2} \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \frac{1}{2} \int \frac{\mathfrak{M}_2^2}{k_2}\, dv_2.$$

Cette expression même peut se transformer.

On a, en effet,

$$\mathfrak{M}_2^2 = \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{B}_2^2 + \mathcal{C}_2^2.$$

D'ailleurs, si le corps 2 s'aimante conformément à la théorie de Poisson, les égalités (1) deviennent

$$\mathcal{A}_2 = -k_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2},$$
$$\mathcal{B}_2 = -k_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y_2},$$
$$\mathcal{C}_2 = -k_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z_2}.$$

On a donc

$$\int \frac{\mathfrak{M}_2^2}{k_2}\, dv_2 = -\int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x^2} \right\| dv_2,$$

et l'égalité (4) devient

$$(5)\qquad \mathfrak{F}'' = \frac{1}{2} \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \right\| dv_2.$$

Or, si le corps 2 était un corps rigide et si l'aimantation qu'il porte était supposée permanente, les actions mutuelles des deux aimants

---

[1] Gottlieb Adler, *Ueber die Energie magnetisch polarisirter Körper, nebst Anwendung der bezüglichen Formeln auf Quincke's Methode zur Bestimmung der Magnetisirungszahl* (*Sitzungsber. der Akad. der Wissenschaften zu Wien*. XCII, 2e Abth.; 1885. — *Wiedemann's Annalen*. Bd. XXVIII, p. 509; 1886).

1 et 2 auraient pour potentiel [Livre VII, Chap. I, égalité (10)], la quantité

$$(6) \qquad \mathfrak{P} = \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \right\| dv_2.$$

La comparaison des égalités (5) et (6)

$$(7) \qquad \mathfrak{P} = 2\mathfrak{F}.$$

Lorsqu'un corps parfaitement doux, placé en présence d'un aimant permanent, s'aimante conformément à la théorie de Poisson, le potentiel des actions magnétiques qu'il subit à un instant donné est la moitié du potentiel des actions mutuelles qui s'exerceraient à cet instant entre les deux corps, si le corps doux était, à cet instant, transformé en un aimant permanent et indéformable.

Cette proposition est due à M. J. Stefan [1]. Elle n'est exacte que pour les corps qui s'aimantent conformément à la théorie de Poisson.

Revenons au cas où le corps 2 est un corps parfaitement doux quelconque; l'égalité (3) peut s'écrire

$$\mathfrak{F}'' = \int \left[\left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2} \right\| + \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2) \right] dv_2 - \frac{1}{2} \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2,$$

ou bien, en vertu des égalités (1),

$$(8) \qquad \mathfrak{F}'' = \int \left[\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2) - \frac{\mathfrak{M}_2^2}{F_2(\mathfrak{M}_2)} \right] dv_2 - \frac{1}{2} \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2.$$

D'après une transformation connue [Livre VII, Chap. III, égalité (17 *bis*)], nous aurons

$$(9) \qquad \frac{1}{2} \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 = \frac{1}{8\pi} \int \Pi\, \mathcal{V}_2\, dv,$$

l'intégration qui figure au second membre s'étendant à tout l'espace.

---

(1) J. STEFAN, *Ueber die Gesetze der elektrodynamischen Induction* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien*, LXIV, 2e Abth., p. 193; 1871).

Posons

$$\Psi_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{F_2(\mathfrak{M}_2)} - \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2), \tag{10}$$

et l'égalité (8) deviendra

$$\mathfrak{F}'' = -\frac{1}{8\pi}\int \Pi\, \mathfrak{V}_2\, dv - \int \Psi_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2. \tag{11}$$

La fonction $\Psi_2(\mathfrak{M}_2)$, définie par l'égalité (10), se représentera souvent dans nos calculs; indiquons-en brièvement les propriétés.

Si l'on se souvient que l'on a [Chap. II, égalité (5)],

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{\partial \mathfrak{M}_2} = \frac{\mathfrak{M}_2}{F(\mathfrak{M}_2)}, \qquad \mathfrak{F}_2(0) = 0,$$

on voit que l'on peut encore écrire

$$\Psi_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{F_2(\mathfrak{M}_2)} - \int_0^{\mathfrak{M}_2} \frac{\mathfrak{M}_2}{F_2(\mathfrak{M}_2)}\, d\mathfrak{M}_2, \tag{12}$$

ou bien, en désignant par μ_2 une certaine valeur de $\mathfrak{M}_2$ comprise entre 0 et $\mathfrak{M}_2$,

$$\Psi_2(\mathfrak{M}_2) = \left[\frac{1}{F_2(\mathfrak{M}_2)} - \frac{1}{2F_2(\mu_2)}\right]\mathfrak{M}_2^2. \tag{13}$$

1° Considérons en premier lieu les *corps diamagnétiques*. Pour ces corps, la fonction $F_2(\mathfrak{M}_2)$ est négative. Si sa valeur absolue est indépendante de $\mathfrak{M}_2$, décroît lorsque $\mathfrak{M}_2$ croît, ou croît faiblement avec $\mathfrak{M}_2$, on sera assuré que la valeur absolue de $F_2(\mathfrak{M}_2)$ est inférieure à la valeur absolue de $2F_2(\mu_2)$. On aura donc

$$\Psi_2(\mathfrak{M}_2) < 0. \tag{14}$$

Ainsi, *pour un corps diamagnétique dont la fonction magnétisante est, en valeur absolue, indépendante de* $\mathfrak{M}$, *faiblement croissante avec* $\mathfrak{M}_2$, *ou décroissante lorsque* $\mathfrak{M}_2$ *croît, la fonction* $\Psi_2(\mathfrak{M}_2)$ *est négative.*

2° Considérons en second lieu les *corps magnétiques*. Pour ces corps, la fonction $F_2(\mathfrak{M}_2)$ est positive. On voit alors sans peine que, *pour un corps magnétique dont la fonction magnétisante est indépendante de* $\mathfrak{M}_2$, *faiblement croissante avec* $\mathfrak{M}_2$,

ou décroissante lorsque $\mathfrak{M}_2$ *croît, la fonction* $\Psi_2(\mathfrak{M}_2)$ *est positive :*

$$(15) \qquad \Psi_2(\mathfrak{M}_2) > 0.$$

Nous pouvons admettre l'hypothèse suivante, dont nous ferons un fréquent usage :

Pour tous les corps magnétiques, la fonction $\Psi(\mathfrak{M})$ *est positive.*

Dans le cas où l'approximation de Poisson peut être acceptée, la fonction magnétisante $F_2(\mathfrak{M}_2)$ peut être remplacée par un coefficient d'aimantation k_2, indépendant de $\mathfrak{M}_2$. L'égalité (3) donne alors

$$(16) \qquad \Psi_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2k_2}.$$

En comparant cette égalité à l'égalité (27) du Chapitre II, on voit que l'on a, dans ce cas,

$$(17) \qquad \Psi_2(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2).$$

Moyennant les renseignements que nous venons d'obtenir sur la fonction $\Psi_2(\mathfrak{M}_2)$, l'égalité (11) nous donne la proposition suivante :

La fonction $\mathfrak{F}''$ *est toujours négative pour un corps magnétique (mais non diamagnétique) quelconque, placé à distance finie d'aimants permanents quelconques.*

Si le corps magnétique parfaitement doux 2 est situé à une distance infiniment grande des aimants permanents 1, il n'est plus aimanté, et le second membre de l'égalité (11) est égal à 0. La quantité $\mathfrak{F}''$ prend donc sa plus grande valeur lorsque le corps parfaitement doux magnétique est infiniment éloigné de tout aimant permanent.

Si l'on observe maintenant que, d'après les propriétés du potentiel thermodynamique interne, les forces magnétiques qui agissent sur le corps doux tendent toujours à le déplacer de manière que la quantité $\mathfrak{F}''$ passe d'une valeur plus grande à une valeur moindre, on voit que l'on arrive à la loi suivante :

Un corps magnétique parfaitement doux, placé à une dis-

tance très grande d'aimants permanents, tend toujours à s'approcher de ces aimants.

Cette proposition justifie le nom de *substances attirables à l'aimant,* souvent donné aux substances magnétiques parfaitement douces.

L'égalité (16) montre que, dans le cas où le corps magnétique s'aimante d'après la théorie de Poisson, l'égalité (11) peut s'écrire

$$(18) \qquad \mathfrak{F}'' = -\frac{1}{8\pi}\int \Pi\, \mathcal{V}_2\, dv - \frac{1}{2}\int \frac{\mathfrak{M}_2^2}{k_2}\, dv_2.$$

Cette forme a été souvent employée par les auteurs qui ont traité du magnétisme.

Revenons à l'égalité (2) qui donne, dans le cas le plus général, l'expression du potentiel $\mathfrak{F}'$ des actions magnétiques qui agissent sur le corps parfaitement doux 2.

Lorsqu'on donne au corps parfaitement doux 2 un déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons auxquelles il est assujetti, les composantes $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ de l'aimantation en chacun de ses points subissent des variations $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$, de telle sorte que les égalités (1) continuent d'être satisfaites. Ces variations de position, de forme et d'aimantation du corps 2 entraînent une variation totale $\delta\mathfrak{F}'$ de la fonction $\mathfrak{F}'$.

Cette variation peut être regardée comme la somme de deux autres.

Imaginons que l'on imprime au corps 2 le déplacement et la déformation que l'on veut étudier, mais que chaque point, en se déplaçant, entraîne son aimantation sans que celle-ci change de grandeur ni d'orientation par rapport aux axes de coordonnées. La quantité $\mathfrak{F}'$ subirait une variation $\delta_1\mathfrak{F}'$.

Supposons d'autre part que, laissant le corps 2 immobile, on fasse varier en chaque point les composantes $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ de l'aimantation de $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$. La quantité $\mathfrak{F}'$ subirait une variation $\delta_2\mathfrak{F}'$. On aura évidemment

$$(19) \qquad \delta\mathfrak{F}' = \delta_1\mathfrak{F}' + \delta_2\mathfrak{F}'.$$

Mais on a, en reproduisant les raisonnements exposés au Chapitre II,

$$\delta_2\mathfrak{F}' = \int \left\| \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2} + \frac{\mathcal{A}_2}{\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2)}\right] \delta\mathcal{A}_2 \right\| dv_2$$

ou bien, d'après les égalités (1),

$$\delta_2 \mathcal{F}' = 0.$$

L'égalité (8) devient donc

$$(20) \qquad \delta \mathcal{F}' = \delta_1 \mathcal{F}'.$$

Lorsqu'un corps parfaitement doux se déforme et se déplace dans un champ magnétique, les forces magnétiques qui lui sont appliquées effectuent un travail égal au signe près à la variation que subirait la quantité $\mathcal{F}'$ si chaque particule du corps 2 entraînait son aimantation sans en changer ni la grandeur ni la direction.

Au lieu de supposer que, dans la première modification, l'aimantation de chaque point est entraînée en gardant une grandeur invariable et une direction invariable dans l'espace, on pourrait supposer que l'aimantation en chaque point est entraînée en gardant une grandeur invariable et une orientation invariable par rapport à trois axes liés à la particule matérielle dont ce point fait partie. La proposition précédente demeurerait exacte.

La nouvelle forme que prend la proposition précédente s'applique aisément au *cas où le corps 2 est un solide indéformable.*

Le déplacement de ce corps résulte d'une translation dont les composantes parallèles aux axes sont δx, δy, δz, et de trois rotations $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, autour des trois axes de coordonnées.

Dès lors, on déduit aisément de la proposition précédente l'égalité

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\mathcal{F}' = {} & \delta x \int \left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2 \partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2 \partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \delta\lambda \int \left[\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2 \partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2 \partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2} \right) y_2 \right. \\ & \qquad \left. - \left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2 \partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2 \partial z_2} \right) z_2 \right] dv_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Cette expression de $\delta\mathcal{F}'$ redonne, pour expression des actions magnétiques qui agissent sur le corps 2, les expressions données par les égalités (12) du Livre VII, Chapitre I.

§ 2. — Instabilité de l'équilibre d'un corps magnétique en présence d'aimants permanents.

L'égalité (21) va nous permettre de répondre d'une manière entièrement générale à une question posée par les recherches de Sir W. Thomson ([1]) et résolue par lui pour un corps très petit et très peu magnétique. Cette question est la suivante : Une masse magnétique indéformable et dénuée de force coercitive, placée en présence d'aimants permanents, est soumise à des forces extérieures qui se réduisent :

1° A une pression normale et uniforme en tout point de sa surface;

2° A une force constante en grandeur et en direction appliquée à chacun de ses éléments.

C'est sensiblement le cas pour une masse placée dans l'air et soumise à l'action de la pesanteur.

Cette masse prend une position d'équilibre déterminée par les considérations développées au paragraphe précédent. Cette position d'équilibre est-elle stable?

Les forces extérieures admettent un potentiel W. Le système admet alors un potentiel thermodynamique total φ qui est la somme du potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ et du potentiel W des forces extérieures

$$\varphi = \mathcal{F} + W.$$

Si, pour toutes les modifications virtuelles qui laissent invariables la forme et l'état physique et chimique des diverses parties du système, φ subit une variation positive, le système est en état d'équilibre stable. La variation première de φ est identiquement nulle, puisque nous supposons réalisées les conditions d'équilibre étudiées au paragraphe précédent, qui, toutes, découlent de l'égalité

$$\delta\mathcal{F} - \delta\mathfrak{T} = 0$$

ou

$$\delta\mathcal{F} + \delta W = 0.$$

([1]) Sir W. THOMSON, *Remarks on the forces experienced by inductively magnetized ferromagnetic or diamagnetic non-crystalline substances* (*Philosophical Magazine*, t. XXXVII, p. 241; 1850. — *Reprint of papers on electrostatics and magnetism*, 2e édition, p. 514).

Nous sommes donc amené à chercher si la variation seconde de φ

$$\delta^2 \varphi = \delta^2 \mathfrak{F} + \delta^2 W$$

est positive.

Nous commencerons par rechercher si $\delta^2 \varphi$ est positif, non pas pour tout déplacement virtuel du corps dénué de force coercitive, *mais seulement pour toute translation virtuelle;* dans ces conditions, il n'est pas difficile de voir que

$$\delta^2 W = 0,$$

et que la question se ramène à chercher si $\delta^2 \mathfrak{F}$ est toujours positif.

Si les seules forces intérieures au système sont les forces magnétiques, nous aurons

$$\delta^2 \mathfrak{F} = \delta^2 \mathfrak{F}'. \tag{22}$$

En vertu de l'égalité (21), nous avons

$$\begin{aligned}\delta \mathfrak{F}' = {} & \delta x \int \left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \delta y \int \left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \delta z \int \left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2} \right) dv_2.\end{aligned}$$

Imaginons que l'on imprime au corps 2 une seconde fois la translation (δx, δy, δz). Désignons par $\delta' \mathcal{A}_2$, $\delta' \mathcal{B}_2$, $\delta' \mathcal{C}_2$ les variations que, d'après les égalités (1), une semblable translation fait éprouver à $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$, en observant que ces variations sont des fonctions de δx, δy, δz et ne doivent pas être confondues avec les variations arbitraires que nous représenterons par $\delta \mathcal{A}_2$, $\delta \mathcal{B}_2$, $\delta \mathcal{C}_2$. L'égalité précédente nous donnera

$$\left\{\begin{aligned}\delta^2 \mathfrak{F}' = {} & \delta x^2 \int \left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^3} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2\, \partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2\, \partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 2\, \delta y\, \delta z \int \left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2\, \partial z_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2\, \partial z_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2^2} \right) dv_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \delta x \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2}\, \delta' \mathcal{A}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2}\, \delta' \mathcal{B}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2}\, \delta' \mathcal{C}_2 \right) dv_2 \\ & + \delta y \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2}\, \delta' \mathcal{A}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2}\, \delta' \mathcal{B}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2}\, \delta' \mathcal{C}_2 \right) dv_2 \\ & + \delta z \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2}\, \delta' \mathcal{A}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2}\, \delta' \mathcal{B}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2}\, \delta' \mathcal{C}_2 \right) dv_2.\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Cette expression de $\delta^2 \mathcal{F}'$ peut se transformer.

$\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ doivent, à chaque instant, vérifier les égalités (1); cette condition peut encore, si l'on se reporte à la méthode suivie pour établir les égalités (1), s'énoncer de la manière suivante :

On a à tout instant, quels que soient $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$,

$$\int \left\| \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \frac{\mathcal{A}_2}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2} \right\| \delta\mathcal{A}_2 \, dv_2 = 0.$$

Cette condition doit être vérifiée lorsque le corps 2 occupe sa position initiale avec son aimantation initiale; elle doit encore être vérifiée après que l'on a fait subir au corps 2 la translation $(\delta x, \delta y, \delta z)$ et à l'aimantation $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2)$ la variation $(\delta'\mathcal{A}_2, \delta'\mathcal{B}_2, \delta'\mathcal{C}_2)$. Le premier membre de cette égalité éprouve donc, lorsqu'on impose cette translation au corps 2 et cette variation à l'aimantation qu'il porte, une variation qui doit être égale à 0, *quels que soient* $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$.

On doit donc avoir, quels que soient $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$,

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} & \delta x \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} \delta\mathcal{A}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2 \, \partial y_2} \delta\mathcal{B}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2 \, \partial z_2} \delta\mathcal{C}_2 \right) dv_2 \\ & + \delta y \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2 \, \partial y_2} \delta\mathcal{A}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} \delta\mathcal{B}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2 \, \partial z_2} \delta\mathcal{C}_2 \right) dv_2 \\ & + \delta z \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2 \, \partial z_2} \delta\mathcal{A}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2 \, \partial z_2} \delta\mathcal{B}_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2} \delta\mathcal{C}_2 \right) dv_2 \\ & + \int \left\| \delta\mathcal{A}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} \int \left\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} \delta'\mathcal{A}'_2 \right\| dv'_2 \right\| dv_2 \\ & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2} (\delta\mathcal{A}_2 \, \delta'\mathcal{A}_2 + \delta\mathcal{B}_2 \, \delta'\mathcal{B}_2 + \delta\mathcal{C}_2 \, \delta'\mathcal{C}_2) \, dv_2 \\ & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d}{d\mathfrak{M}_2} \left[\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2} \right] \| \mathcal{A}_2 \, \delta\mathcal{A}_2 \| . \| \mathcal{A}_2 \, \delta'\mathcal{A}_2 \| \, dv_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité, devant avoir lieu quels que soient $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$, aura lieu encore si l'on pose

$$\delta\mathcal{A}_2 = \delta'\mathcal{A}_2, \qquad \delta\mathcal{B}_2 = \delta'\mathcal{B}_2, \qquad \delta\mathcal{C}_2 = \delta'\mathcal{C}_2.$$

La forme qu'elle prend par cette substitution, comparée à l'éga-

lité (23), donne

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2\mathcal{F}' = {} & \delta x^2 \int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^3} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2\,\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2\,\partial z_2}\right) dv_2 && (1)\\
& + \delta y^2 \int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial y_2^2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^3} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2\,\partial z_2}\right) dv_2 && (2)\\
& + \delta z^2 \int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial z_2^2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\,\partial z_2^2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^3}\right) dv_2 && (3)\\
& + 2\,\delta y\,\delta z \int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial y_2\,\partial z_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2\,\partial z_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\,\partial z_2^2}\right) dv_2 && (4)\\
& + 2\,\delta z\,\delta x \int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2\,\partial z_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial y_2\,\partial z_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial z_2^2}\right) dv_2 && (5)\\
& + 2\,\delta x\,\delta y \int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2\,\partial y_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial y_2^2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial y_2\,\partial z_2}\right) dv_2 && (6)\\
& - \int \left\| \delta'\mathcal{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \int \left\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2}\,\delta'\mathcal{B}'_2 \right\| dv'_2 \right\| dv_2 && (7)\\
& - \int \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2} \left[(\delta'\mathcal{A}_2)^2 + (\delta'\mathcal{B}_2)^2 + (\delta'\mathcal{C}_2)^2\right] dv_2 && (8)\\
& - \int \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d}{d\mathfrak{M}_2}\left[\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2}\right] (\mathcal{A}_2\,\delta'\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2\,\delta'\mathcal{B}_2 + \mathcal{C}_2\,\delta'\mathcal{C}_2)^2\, dv_2. && (9)
\end{aligned}
\right.
$$

Cette forme de $\delta^2\mathcal{F}'$ se prête à une interprétation très simple.

Supposons que, *sans jamais faire varier l'aimantation en chaque point,* nous imprimions deux fois de suite au corps dénué de force coercitive 2 la translation $(\delta x, \delta y, \delta z)$; il en résulterait pour $\mathcal{F}'$ une variation seconde $\delta_1^2\mathcal{F}'$ représentée par les termes (1), (2), (3), (4), (5), (6).

Supposons d'autre part que, *sans jamais déplacer le corps* 2, nous imprimions deux fois de suite à son aimantation en chaque point la variation $(\delta'\mathcal{A}_2, \delta'\mathcal{B}_2, \delta'\mathcal{C}_2)$. Il en résulterait pour $\mathcal{F}'$ une variation seconde $\delta_2'^2\mathcal{F}'$, et l'ensemble des termes (7), (8), (9) a précisément pour valeur, d'après les calculs faits au Chapitre III, $(-\delta_2'^2\mathcal{F}')$. On a donc

$$\delta^2\mathcal{F}' = \delta_1^2\mathcal{F}' - \delta_2'^2\mathcal{F}'$$

ou bien, en vertu de l'égalité (22),

$$(26)\qquad \delta^2\mathcal{F} = \delta_1^2\mathcal{F}' - \delta_2'^2\mathcal{F}'.$$

Examinons en premier lieu la quantité $\delta_1^2\mathcal{F}'$ représentée, comme nous l'avons vu, par les termes (1), (2), (3), (4), (5), (6). Cette

expression est une forme homogène et du second degré de δx, δy, δz. La somme des coefficients de δx^2, δy^2, δz^2 peut s'écrire

$$\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\mathcal{V}_1 + \mathcal{B}_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta\mathcal{V}_1 + \mathcal{C}_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\Delta\mathcal{V}_1\right) dv_2.$$

Mais, en tout point du corps 2, on a

$$\Delta\mathcal{V}_1 = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\mathcal{V}_1 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta\mathcal{V}_1 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z_2}\Delta\mathcal{V}_1 = 0.$$

La somme des coefficients de δx^2, δy^2, δz^2, dans la quantité $\delta_1^2\mathcal{F}'$, est donc égale à 0; par conséquent, ou bien la quantité $\delta_1^2\mathcal{F}'$ est identiquement nulle, ou bien il existe des translations pour lesquelles elle est négative. Dans tous les cas, on peut affirmer qu'elle ne saurait être positive pour toute translation.

Si l'aimantation prise par le corps 2 est une aimantation stable, la quantité $\mathcal{F}'$ éprouvera une variation seconde certainement positive lorsqu'on donnera deux fois de suite la variation $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$ à l'aimantation en un point du corps 2, et cela quels que soient $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$, pourvu qu'ils ne soient pas identiquement nuls. Cela aura lieu en particulier si l'on fait

$$\delta\mathcal{A}_2 = \delta'\mathcal{A}_2, \qquad \delta\mathcal{B}_2 = \delta'\mathcal{B}_2, \qquad \delta\mathcal{C}_2 = \delta'\mathcal{C}_2,$$

à moins que $\delta'\mathcal{A}_2$, $\delta'\mathcal{B}_2$, $\delta'\mathcal{C}_2$ ne soient identiquement nuls.

La quantité $\delta_2'^2\mathcal{F}'$ est donc positive, à moins que l'on n'ait, en tout point du corps 2,

$$\delta'\mathcal{A}_2 = 0, \qquad \delta'\mathcal{B}_2 = 0, \qquad \delta'\mathcal{C}_2 = 0.$$

D'après l'égalité (24), ces dernières égalités ne peuvent avoir lieu, à moins que l'on n'ait, en tout point du corps 2,

$$\frac{\partial^2\mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{V}_1}{\partial z_2^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{V}_1}{\partial y_2\,\partial z_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{V}_1}{\partial z_2\,\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial y_2} = 0,$$

c'est-à-dire à moins que le champ dans lequel le corps 2 est placé ne soit uniforme. Dans ce cas, les deux quantités $\delta_1^2\mathcal{F}'$, $\delta_2'^2\mathcal{F}'$ sont

identiquement nulles, et il en est de même des variations de tous les ordres de $\mathfrak{F}'$.

Nous arrivons ainsi aux conclusions suivantes :

1° *Si le champ magnétique dans lequel le corps se trouve placé est uniforme, l'équilibre du corps est indifférent.*

2° *Si le champ magnétique dans lequel le corps se trouve placé n'est pas uniforme et si l'aimantation prise par ce corps est stable pour la position qu'il occupe, il existe certainement des translations pour le quelles* $\delta^2 \mathfrak{F}$ *est négatif, et l'équilibre du corps est instable.*

Nous avons vu que, sur tous les corps magnétiques connus, placés dans une position déterminée, l'aimantation prend une distribution stable ; l'équilibre d'un corps magnétique, indifférent dans un champ uniforme, est instable dans un champ non uniforme.



CHAPITRE VI.

IMPOSSIBILITÉ DES CORPS DIAMAGNÉTIQUES.

Nous avons laissé de côté, dans les trois Chapitres précédents, les corps diamagnétiques, c'est-à-dire les corps pour lesquels la fonction $F(\mathfrak{M})$ serait négative; revenons maintenant à l'étude de ces corps.

Un corps parfaitement doux immobile étant placé en présence d'aimants permanents, la variation seconde du potentiel thermodynamique interne du système a pour expression [Chap. III, égalité (16)],

$$\delta^2 \mathcal{F} = \frac{\delta t^2}{8\pi} \int \Pi\,\Omega\, du$$
$$+ \delta t^2 \int \left\{ \frac{\Pi\Omega}{8\pi} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} - \frac{\mathfrak{M} \dfrac{\partial F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}}{[F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)]^2} m^2 \right\} dv,$$

les diverses lettres que renferme cette formule gardant la signification qui leur a été donnée au Chapitre III.

Supposons que le corps soit un corps diamagnétique; sa fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$ est alors une quantité négative.

Supposons, en outre, que ce coefficient ait une très petite valeur absolue.

Les équations de l'équilibre magnétique

$$\mathcal{A} = - F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x},$$
$$\mathcal{B} = - F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y},$$
$$\mathcal{C} = - F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$$

montrent que la valeur de $\mathfrak{M}$ est une quantité très petite du même ordre que $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$.

Les quantités

$$\frac{1}{8\pi}\int \Pi\,\Omega\,du, \quad \frac{1}{8\pi}\int \Pi\,\Omega\,dv$$

sont des quantités finies.

La quantité

$$J = \int \frac{a^2 + b^2 + c^2}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}\,dv$$

est une quantité négative dont la valeur absolue, très grande, est de l'ordre de $\frac{1}{F(\mathfrak{M})}$.

Si la fonction $F(\mathfrak{M})$ varie peu, de telle sorte que la quantité $\frac{dF(\mathfrak{M})}{d\mathfrak{M}}$ soit négligeable devant la quantité $F(\mathfrak{M})$, la quantité

$$J' = -\int \frac{\mathfrak{M}\,\frac{\partial F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}}{[F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)]^2}\,m^2\,dv$$

sera négligeable devant la quantité J. Si $\frac{dF(\mathfrak{M})}{d\mathfrak{M}}$ n'est pas négligeable devant $F(\mathfrak{M})$, il n'en sera plus de même.

Si la valeur absolue de $F(\mathfrak{M})$ décroît lorsque $\mathfrak{M}$ croît, J' est très grand et négatif. J' est très grand et positif si la valeur absolue de $F(\mathfrak{M})$ croît avec $\mathfrak{M}$.

Donc, *pour un corps diamagnétique dont la fonction magnétisante a une valeur absolue toujours très petite, qui demeure constante, croît très faiblement ou décroît lorsque l'aimantation croît,* $\delta^2\mathfrak{F}$ *est toujours négatif.* $\mathfrak{F}$ *peut admettre un maximum et un seul, mais ne peut admettre de minimum.*

Sans avoir à se préoccuper du sens de la variation de $F(\mathfrak{M})$, on peut arriver à une conclusion intéressante, quoique moins complète que la précédente.

On peut toujours imposer à l'aimantation du corps parfaitement doux une variation telle que l'on ait en tout point

$$m = 0.$$

Si l'on se souvient, en effet, que m est défini par l'égalité

$$\delta\mathfrak{M} = m\,\delta t,$$

on voit qu'il suffira, pour parvenir au but que nous venons d'indiquer, de faire varier en tout point l'orientation de l'aimantation sans en faire varier l'intensité.

Pour une semblable variation, on aura

$$J' = 0.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Un corps diamagnétique, dont la fonction magnétisante a une valeur absolue très petite, étant pris dans un état d'aimantation quelconque, on peut toujours imposer à cette aimantation une variation telle que la quantité $\delta^2 \mathfrak{F}$ soit négative. $\mathfrak{F}$ ne peut donc, pour un semblable corps, présenter de minimum.

Les propositions que nous venons de démontrer conduisent à la conclusion que voici :

Sur un corps diamagnétique dont la fonction magnétisante a une valeur toujours très petite, il ne peut pas exister de distribution magnétique correspondant à un équilibre stable.

Cette conclusion doit encore demeurer vraie pour un corps diamagnétique dont la fonction magnétisante n'est pas très petite ; c'est ce que nous allons démontrer, en nous servant des propriétés de la fonction $\Psi(\mathfrak{M})$, établies au § 1 du Chapitre V.

Considérons un système formé par des aimants permanents, que nous désignerons par l'indice 1 et par un corps dénué de force coercitive que nous désignerons par l'indice 2.

Le potentiel thermodynamique interne de ce système peut s'écrire, en désignant par $\mathfrak{P}_1$ la fonction potentielle magnétique des aimants permanents 1 en un point de ces aimants ; par $\mathfrak{P}_2$ la fonction potentielle de ces aimants en un point du corps 2 ; par $\mathfrak{V}_2$ la fonction potentielle du corps 2 en un point de ce corps, et en supposant le système non électrisé

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) &+ \frac{1}{2}\int \left\| \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \int \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{P}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 \\ &+ \frac{1}{2}\int \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \int \mathfrak{F}_1(\mathfrak{M}_1)\, dv_1 + \int \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2.\end{aligned}$$

Cette expression est générale ; elle est exacte, en particulier, si la

distribution magnétique sur le corps 2 est une distribution d'équilibre.

Considérons le corps diamagnétique et les aimants dans une certaine position, et supposons que l'on ait trouvé, sur le corps diamagnétique, une certaine distribution d'équilibre stable correspondant à une valeur minima $\mathfrak{F}_0$ du potentiel thermodynamique interne; puis, supposons que, les corps étant placés dans la même position, on donne à toutes les particules de la masse 2 la même aimantation, sauf à la particule

$$dx_2\, dy_2\, dz_2 = dv_2,$$

que l'on supposera non aimantée. Le potentiel thermodynamique interne du système prendra alors une nouvelle valeur $\mathfrak{F}_1$, et l'on aura

$$\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{F}_1 = \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2,$$

les quantités qui figurent au second membre ayant toutes les valeurs qu'elles ont dans l'état d'équilibre considéré. Or, dans cet état d'équilibre, on a

$$\mathcal{A}_2 = - \mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x_2},$$

$$\mathcal{B}_2 = - \mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y_2}.$$

$$\mathcal{C}_2 = - \mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z_2}.$$

De ces égalités on déduit

$$\left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x_2} \right\| = - \frac{\mathfrak{M}_2^2}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}$$

et, par conséquent,

$$\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{F}_1 = \left[\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2) - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)} \right] dv_2,$$

ou bien, d'après l'égalité (1) du Chapitre précédent,

$$\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{F}_1 = - \Psi_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2.$$

Si le corps 2 est un corps diamagnétique dont la fonction magnétisante est indépendante de $\mathfrak{M}$, croît faiblement en valeur absolue avec $\mathfrak{M}$, ou décroît en valeur absolue lorsque $\mathfrak{M}$ croît, on aura,

d'après l'inégalité (4) du Chapitre précédent,

$$\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{F}_1 > 0.$$

On voit, d'après cela, que, *si, pour un des corps diamagnétiques vérifiant les restrictions précédentes, on considérait une distribution magnétique d'équilibre correspondant à un minimum du potentiel thermodynamique, on pourrait toujours trouver une distribution dans laquelle le potentiel thermodynamique aurait une valeur moindre que dans l'état considéré.*

Il est, d'après cela, très vraisemblable que, pour de semblables corps, il n'existe aucun minimum du potentiel thermodynamique interne, proposition que nous savons être vraie lorsque la fonction magnétisante est très petite.

Mais voici une démonstration entièrement générale de ce fait que, sur un système dont une portion quelconque est diamagnétique, le potentiel thermodynamique ne peut jamais présenter de minimum.

Soit dv un élément de volume pris dans une région diamagnétique. Faisons tourner l'aimantation de cet élément de volume, de telle façon que ses composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ varient de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, sans que l'aimantation $\mathfrak{M}$ change de grandeur. Nous aurons

$$(1) \qquad \mathcal{A}\,\delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta\mathcal{C} = 0$$

et

$$\delta\mathfrak{F} = \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\,\delta\mathcal{A} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\,\delta\mathcal{C}\right) dv.$$

De cette dernière égalité, on déduit

$$\delta^2\mathfrak{F} = \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\,\delta^2\mathcal{A} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\,\delta^2\mathcal{B} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\,\delta^2\mathcal{C}\right) dv$$

ou bien, en vertu des conditions d'équilibre,

$$\mathcal{A} = -\,F(\mathfrak{M})\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x},$$

$$\mathcal{B} = -\,F(\mathfrak{M})\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y},$$

$$\mathcal{C} = -\,F(\mathfrak{M})\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},$$

$$\delta^2\mathfrak{F} = -\,\frac{1}{F(\mathfrak{M})}\left(\mathcal{A}\,\delta^2\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta^2\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta^2\mathcal{C}\right) dv.$$

Mais l'égalité (1) donne

$$\mathcal{A}\,\delta^2\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta^2\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta^2\mathcal{C} + (\delta\mathcal{A})^2 + (\delta\mathcal{B})^2 + (\delta\mathcal{C})^2 = 0$$

et l'on a, par conséquent,

$$\delta^2\mathcal{F} = \frac{1}{F(\mathfrak{M})}\left[(\delta\mathcal{A})^2 + (\delta\mathcal{B})^2 + (\delta\mathcal{C})^2\right] dv.$$

Si $F(\mathfrak{M})$ est négatif, il en est de même de $\delta^2\mathcal{F}$. Ainsi, *si, dans un système, une région, si petite soit-elle, est diamagnétique, il ne peut y avoir sur ce système d'équilibre magnétique stable.*

Nous pouvons donc énoncer, sans rectriction, la proposition suivante :

Les principes de la Thermodynamique ne permettent pas qu'il existe de corps diamagnétiques, c'est-à-dire de corps dont la fonction magnétisante soit négative.

Indiquons brièvement ici les recherches qui ont conduit les physiciens à cette proposition.

Nous avons donné ([1]), dès 1887, l'expression de $\delta^2\mathcal{F}$, mais sans remarquer que cette quantité devait être négative pour les corps diamagnétiques. Plus tard ([2]), nous avons remarqué que, si l'on supposait l'équilibre établi sur un système renfermant des corps diamagnétiques, on pouvait toujours définir un état du même système correspondant à une valeur moindre du potentiel thermodynamique interne. Mais, au lieu d'en conclure l'impossibilité d'une aimantation stable sur les corps diamagnétiques, nous en avons simplement conclu qu'il ne pouvait y avoir, sur ces corps, un état d'équilibre unique, conclusion qui nous semblait conforme à certaines expériences de M. Joubin, dont il sera question au Chapitre VIII, § 3. C'est cette conclusion que nous exposions dans notre *Théorie nouvelle de l'aimantation par influence, fondée sur la Thermodynamique* ([3]).

Peu après, M. Parker ([4]) a reconnu qu'il y avait contradiction

([1]) P. Duhem, *Sur l'aimantation par influence* (*Comptes rendus*, t. CV, p. 798; 31 octobre 1887).

([2]) P. Duhem, *Sur l'aimantation des corps diamagnétiques* (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 736; 12 mars 1888).

([3]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II; 1888.

([4]) John Parker, *On diamagnetism and concentration of energy* (*Philosophical Magazine*, 5e série, t. XXVII, p. 403; mai 1889).

entre l'existence des corps diamagnétiques et le principe de Carnot-Clausius; mais, au lieu d'en conclure l'impossibilité des corps diamagnétiques, M. Parker a proposé de modifier le principe de Carnot-Clausius.

C'est alors que nous avons développé ([1]) les considérations que l'on vient de lire.

Au moment où nous publiions ces considérations, nous n'avions pas connaissance d'une Note remarquable ([2]) que M. E. Beltrami avait publiée peu de temps avant le Mémoire de M. Parker.

Dans cette Note, M. E. Beltrami démontre que, pour un système entièrement diamagnétique, la quantité

$$\mathfrak{F} + \int \frac{\mathfrak{M}^2}{2k}\, dv,$$

qui représente, en adoptant l'approximation de Poisson, la partie magnétique du potentiel thermodynamique interne (M. E. Beltrami dit *l'énergie*) est négative. « Ce résultat, ajoute M. E. Beltrami, en entraîne un autre, qui n'est pas moins invraisemblable. On sait que, si, à la distribution magnétique induite dans un corps par des actions magnétiques externes, données et invariables, on superpose une autre distribution magnétique quelconque, le potentiel de tout le système augmente d'une quantité qui est simplement égale au potentiel de la distribution superposée à la distribution induite. Il résulte de là, en tenant compte du résultat précédent, que, si le corps induit est paramagnétique, le potentiel augmente quand cesse l'équilibre d'induction, mais au contraire que, si le corps est diamagnétique, le potentiel diminue. Dans le premier cas donc, le potentiel total serait minimum dans l'état d'équilibre; dans le second, au contraire, il serait maximum, en sorte que l'équilibre d'induction magnétique serait instable. »

([1]) P. Duhem, *Sur l'impossibilité des corps diamagnétiques* (*Comptes rendus*, t. CVIII, p. 1042; 20 mai 1889). — *Des corps diamagnétiques* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, Mémoire n° 2; 1889).

([2]) E. Beltrami, *Note fisico-matematiche, lettera al prof. Ernesto Cesàro* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. III; séance du 10 mars 1889).

CHAPITRE VII.

AIMANTATION D'UN CORPS MAGNÉTIQUE AU SEIN D'UN MILIEU MAGNÉTIQUE.

§ 1. — Historique.

La Thermodynamique conduit à rejeter l'existence des corps diamagnétiques, tout comme la théorie de l'aimantation par influence imaginée par Poisson. Mais, tandis que l'incompatibilité des corps diamagnétiques avec la théorie de Poisson avait simplement amené la plupart des physiciens à rejeter les hypothèses sur lesquelles repose la théorie de Poisson, leur incompatibilité avec les principes de la Thermodynamique doit forcément amener à rejeter leur existence, à moins que l'on ne veuille rejeter les axiomes de Clausius et de Thomson, c'est-à-dire admettre la possibilité de créer, avec des corps diamagnétiques, des instruments capables de produire un mouvement perpétuel.

Il ne peut donc pas exister de corps diamagnétiques proprement dits, c'est-à-dire de corps dont la fonction magnétisante soit négative.

Cependant la nature nous présente des corps, le bismuth par exemple, dont la fonction magnétisante paraît être négative. Comment doit-on interpréter l'existence de semblables corps?

La réponse à cette question semble avoir été donnée par Edmond Becquerel ([1]).

D'après Edmond Becquerel, tous les corps sont magnétiques; mais ils sont tous plongés dans un milieu éthéré qui est également magnétique; ils semblent alors être magnétiques ou diamagné-

([1]) Edmond Becquerel, *De l'action du magnétisme sur tous les corps* (*Comptes rendus*, séance du 21 mai 1849. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXVIII, p. 283; 1850).

tiques selon qu'ils sont en réalité plus ou moins magnétiques que le milieu dans lequel ils sont plongés. Voici en quels termes M. Edmond Becquerel énonce cette hypothèse :

« Un corps placé à distance d'un centre magnétique est attiré vers ce centre avec une force égale à la différence qui existe entre le magnétisme spécifique de ce corps et celui du milieu dans lequel il se trouve plongé. Ou, en d'autres termes, *l'action du magnétisme sur un corps est la différence des actions exercées sur ce corps et sur le milieu ambiant déplacé.* »

M. Becquerel ajoute :

« On peut rendre compte de ce principe à l'aide d'une démonstration analogue à celle qui est en usage pour prouver le principe d'Archimède.

» Soit A un centre magnétique placé au milieu d'un espace rempli d'un fluide attirable à l'aimant. Dans cette position, il se produira un certain état d'équilibre, d'après lequel chaque point de ce fluide sera en repos, et il n'y aura qu'un accroissement de pression à mesure que l'on s'approchera de A, pression exercée par le milieu qui sert à transmettre les actions magnétiques. D'après cela, si l'on considère une masse isolée M de ce fluide, cette masse sera attirée vers A avec une force que l'on peut représenter par f; or, puisqu'il y a équilibre en tous les points du milieu lorsque le fluide environne A, il est donc nécessaire que l'action du centre magnétique A sur le fluide environnant M donne une résultante égale à f et dirigée en sens inverse : cela équivaut à une répulsion égale à $-f$. Supposons maintenant que l'on substitue à la masse M une autre substance de même volume ; la force attractive de M vers A sera plus grande ou plus petite que f, suivant que cette substance sera plus ou moins magnétique que le milieu. Représentons cette force par F ; la force en vertu de laquelle la masse se portera vers le centre A sera donc $(F-f)$, la répulsion $-f$ existant aussi bien dans ce cas que précédemment. »

Plücker [1], en étudiant en même temps qu'Edmond Becque-

---

[1] J. PLÜCKER, *Ueber den Einfluss der Umgebung eines Körpers auf die Anziehung oder Abstossung, die er durch einen Magnet erfährt* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXVII, p. 578 ; 1849).

rel les actions magnétiques exercées sur un corps plongé dans un liquide magnétique ou diamagnétique, arrive à une idée analogue. Voici, en effet, la proposition qu'il énonce :

« L'attraction exercée sur un corps magnétique, que l'on plonge dans un fluide magnétique ou diamagnétique, augmente ou diminue d'une quantité précisément égale à la répulsion diamagnétique ou à l'attraction magnétique qui serait exercée sur le fluide dont il vient occuper la place. Au contraire, la répulsion exercée sur un corps diamagnétique que l'on plonge dans le même liquide augmente ou diminue d'une quantité égale à l'attraction magnétique ou à la répulsion diamagnétique qui serait exercée sur le fluide dont il vient occuper la place. »

Mais Plücker, en énonçant cette loi pour l'action d'un liquide sur un corps magnétique ou diamagnétique qu'il baigne, se refuse à considérer l'éther comme susceptible d'exercer de pareilles actions, et à expliquer ainsi le diamagnétisme. Il ne veut pas faire entrer en ligne de compte dans ses théories des forces appliquées à un agent impondérable, et qui n'ont point jusqu'ici d'analogue.

Nous allons étudier les phénomènes que présente un corps magnétique plongé dans un milieu magnétique; les propositions auxquelles nous parviendrons nous montreront qu'en admettant l'existence d'un milieu impondérable répandu dans tout l'espace et susceptible de s'aimanter, il est possible d'expliquer toutes les propriétés des corps, comme le bismuth, auxquels on avait d'abord attribué une fonction magnétisante négative.

Dans le présent Chapitre, nous nous contenterons d'établir les lois de l'aimantation d'un corps magnétique plongé dans un milieu magnétique et soumis à l'action d'aimants permanents. Nous étudierons ultérieurement les forces auxquelles un semblable corps est soumis.

§ 2. — Aimantation d'un corps parfaitement doux plongé dans un milieu parfaitement doux.

Imaginons que des aimants permanents, désignés par l'indice 1, et un corps parfaitement doux, désigné par l'indice 2, soient plon-

gés dans un milieu magnétique s'étendant assez loin pour qu'on puisse le regarder comme indéfini, que nous désignerons par l'indice 3.

Nous supposerons, dans le présent Livre, que ce fluide soit *homogène, incompressible* et *parfaitement doux*. Nous examinerons, dans un autre Chapitre, s'il y a lieu d'étudier des fluides non parfaitement doux. Quant à l'aimantation des fluides non compressibles, nous l'étudierons au Livre XII.

Le fluide étudié pourra être un fluide pondérable; il pourra être aussi le fluide impondérable dont l'existence est invoquée par M. Edmond Becquerel pour expliquer les propriétés des corps diamagnétiques en apparence.

Si nous désignons par $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique du système, et si nous conservons les notations toujours employées dans les Chapitres précédents, le potentiel thermodynamique interne du système que nous considérons aura pour valeur

$$\mathcal{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q + \int \left[\frac{1}{2} \left\| \mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1} \right\| + \mathcal{F}_1(\mathfrak{M}_1)\right] dv_1$$
$$+ \int \left[\frac{1}{2} \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2} \right\| + \mathcal{F}(\mathfrak{M}_2)\right] dv_2 + \int \left[\frac{1}{2} \left\| \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_3} \right\| + \mathcal{F}_3(\mathfrak{M}_3)\right] dv_3.$$

La dernière intégrale s'étend à un domaine illimité. Nous admettrons néanmoins qu'en toutes circonstances les quantités $\mathcal{V}$ et $\mathfrak{M}_3$ s'annulent à l'infini, de telle sorte que cette intégrale conserve une valeur limitée.

En raisonnant sur cette expression selon la méthode indiquée au Chapitre II, nous établirons les conditions d'équilibre magnétique sur le système. Si nous posons

$$\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2}{\dfrac{d\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2}}, \qquad \mathrm{F}_3(\mathfrak{M}_3) = \frac{\mathfrak{M}_3}{\dfrac{d\mathcal{F}_3(\mathfrak{M}_3)}{d\mathfrak{M}_3}},$$

ces conditions d'équilibre s'exprimeront de la manière suivante :

En tous les points du corps parfaitement doux, nous aurons

$$\mathcal{A}_2 = -\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2}, \qquad \mathcal{B}_2 = -\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial \mathcal{V}}{dy_2}, \qquad \mathcal{C}_2 = -\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2}.$$

En tous les points du milieu, nous aurons

$$\mathcal{A}_3 = -\mathrm{F}_3(\mathfrak{M}_3)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_3}, \qquad \mathcal{B}_3 = -\mathrm{F}_3(\mathfrak{M}_3)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_3}, \qquad \mathcal{C}_3 = -\mathrm{F}_3(\mathfrak{M}_3)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_3}.$$

Une méthode analogue à celle que nous avons suivie au Chapitre II permettra de ramener la détermination de $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{C}_3$ à l'intégration d'équations aux dérivées partielles.

Cette détermination se fera en employant deux certaines fonctions $\lambda_2(\Pi\mathcal{V})$, $\lambda_3(\Pi\mathcal{V})$, qui ne sont autre chose que les expressions de $-F_2(\mathfrak{M}_2)$, $-F_3(\mathfrak{M}_3)$, en fonction de $\Pi\mathcal{V}$.

Il est inutile de donner ici la forme de l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ en chacune des trois régions 1, 2, 3. Il nous suffira d'indiquer la forme des conditions aux limites qu'elle vérifie sur chacune des surfaces qui délimitent ces régions.

Sur la surface de séparation des régions 1 *et* 3 on a

$$(1) \qquad \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_1} + [1 - 4\pi\lambda_3(\Pi\mathcal{V})]\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_3} = -4\pi s(x, y, z),$$

$s(x, y, z)$ étant une fonction connue par les données du problème, en vertu de l'égalité

$$s(x, y, z) = -[\mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) + \mathcal{B}_1 \cos(N_1, y) + \mathcal{C}_1 \cos(N_1, z)].$$

Sur la surface de séparation des régions 2 *et* 3 on a

$$(2) \qquad [1 - 4\pi\lambda_2(\Pi\mathcal{V})]\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_2} + [1 - 4\pi\lambda_3(\Pi\mathcal{V})]\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_3} = 0.$$

On démontrerait sans peine, par la méthode suivie au Chapitre III, que ces équations déterminent une et une seule fonction $\mathcal{V}$ et que l'aimantation définie par cette fonction $\mathcal{V}$ est une aimantation stable, pourvu que les fonctions magnétisantes du corps 2 et du milieu 3 soient positives et vérifient les conditions accessoires indiquées au Chapitre III.

Plaçons-nous dans le cas particulier où le corps magnétique et le milieu qui l'entourent s'aimantent tous deux conformément à la théorie de Poisson. Dans ce cas, on a

$$F_2(\mathfrak{M}_2) = -\lambda_2(\Pi\mathcal{V}) = k_2,$$
$$F_3(\mathfrak{M}_3) = -\lambda_3(\Pi\mathcal{V}) = k_3,$$

k_2, k_3 étant deux coefficients d'aimantation constants.

Soient $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ les fonctions potentielles magnétiques des trois régions aimantées 1, 2 et 3. Nous aurons

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3.$$

La fonction $\mathcal{V}_1$ étant connue par les données du problème, il nous suffit de déterminer la fonction

$$\mathfrak{W} = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3.$$

Cette fonction est harmonique en chacune des trois régions 1, 2 et 3. Sur la surface de séparation des régions 1 et 3 elle vérifie l'égalité

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_1} + (1 + 4\pi k_3) \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_3} = 0.$$

Sur la surface de séparation des régions 2 et 3 elle vérifie l'égalité

$$(4) \qquad (1 + 4\pi k_2) \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_2} + (1 + 4\pi k_3) \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_3} = 0.$$

D'après Maxwell (¹) et É. Mathieu (²), cette fonction $\mathfrak{W}$ est identique à la fonction potentielle magnétique d'une masse occupant la place du corps 3, plongée dans un milieu non magnétique, et dont le coefficient d'aimantation k serait donné par l'égalité

$$1 + 4\pi k = \frac{1 + 4\pi k_2}{1 + 4\pi k_3}.$$

Or cela ne serait exact, comme on le voit aisément, que si l'équation (3) était remplacée par l'équation

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_2} = 0.$$

La proposition de Maxwell et de É. Mathieu ne peut donc être conservée.

Les équations de l'équilibre magnétique sur le système peuvent s'écrire

$$\mathcal{A}_2 = - F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial x_2},$$

$$\mathcal{B}_2 = - F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial y_2},$$

$$\mathcal{C}_2 = - F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial z_2},$$

(¹) MAXWELL, *Traité d'électricité et de magnétisme*, t. II, p. 59 de la traduction française.

(²) E. MATHIEU, *Théorie du potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme;* 2ᵉ Partie, *Électrostatique et Magnétisme*, p. 163; Paris, 1886.

$$\mathcal{A}_3 = - F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial x_3},$$

$$\mathcal{B}_3 = - F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial y_3},$$

$$\mathcal{C}_3 = - F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial z_3}.$$

Supposons, comme nous le ferons souvent dans les applications, que le corps 2 et le milieu 3 soient peu magnétiques; les deux fonctions $F_2(\mathfrak{M}_2)$ et $F_3(\mathfrak{M}_3)$ seront alors très petites. Il est aisé de voir, dans ce cas, que, si l'on néglige les quantités de l'ordre de $[F_2(\mathfrak{M}_2)]^2$, $[F_3(\mathfrak{M}_3)]^2$, $F_2(\mathfrak{M}_2) F_3(\mathfrak{M}_3)$, on pourra remplacer les égalités précédentes par celles-ci

$$\mathcal{A}_2 = - F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}, \qquad \mathcal{A}_3 = - F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_3},$$

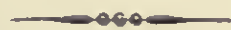
$$\mathcal{B}_2 = - F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}, \qquad \mathcal{B}_3 = - F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_3},$$

$$\mathcal{C}_2 = - F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}, \qquad \mathcal{C}_3 = - F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_3}.$$

Ces égalités conduisent à la proposition suivante :

Dans un milieu peu magnétique sont plongés des aimants permanents et un corps peu magnétique dénué de force coercitive; le corps parfaitement doux prend l'aimantation qu'il prendrait sous l'influence des aimants permanents, si le milieu où il est plongé n'était pas magnétique; le milieu prend l'aimantation qu'il prendrait sous l'influence des aimants permanents, s'il ne renfermait aucun corps autre que ces aimants.

Cette proposition est contenue implicitement dans celles qu'ont énoncées Edmond Becquerel et Plücker.



CHAPITRE VIII.

PRESSION D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE AIMANTÉ.

§ 1. — Comment, dans un fluide incompressible aimanté, se disposent les divers éléments magnétiques.

Nous avons montré, au Chapitre précédent, suivant quelles lois s'aimantait un système qui renferme un corps magnétique dénué de force coercitive entouré par un fluide également dénué de force coercitive.

Nous devons maintenant rechercher quelles actions un semblable fluide exerce sur le corps qui y est plongé ; c'est, en effet, l'étude de ces forces qui doit, d'après les idées de M. Edmond Becquerel, nous fournir l'explication des phénomènes présentés par les corps soi-disant diamagnétiques ; nous avons donc à constituer l'hydrostatique des fluides aimantés dénués de force coercitive.

Ce problème, à son tour, peut être étendu : nous pouvons chercher à constituer d'une manière générale l'hydrostatique des fluides aimantés, que ces fluides soient ou non dénués de force coercitive ; mais le sens même qu'il convient d'attribuer à cet énoncé ainsi généralisé nécessite quelques explications qui équivalent à la définition de ces mots *fluide aimanté*.

Nous dirons qu'un corps aimanté est fluide s'il est possible de lui imprimer toutes les déformations virtuelles qui n'altèrent pas le volume de ses différentes particules, et dans lesquelles l'aimantation de chaque particule demeure invariablement liée à la matière qui forme cette particule.

Il se peut que les modifications virtuelles ainsi définies ne soient pas les seules que le fluide puisse présenter : par exemple, si le fluide est compressible, on pourra lui imprimer des déformations

qui altèrent le volume de ses différentes parties; mais, lorsqu'on veut définir les modifications virtuelles que le fluide peut présenter, en outre de celles qui entrent dans la définition générale du fluide aimanté, on se trouve en présence de plusieurs systèmes de définitions, dont chacun caractérise un fluide doué de propriétés différentes. Ainsi l'on peut convenir que, dans les modifications virtuelles où le volume d'une particule varie, le moment magnétique de cette particule demeure invariable, en sorte que l'aimantation en chaque point diminue dans le même rapport que la densité; on peut supposer, au contraire, que l'aimantation en chaque point demeure invariable en grandeur, en sorte que le moment magnétique d'une particule qui se dilate augmente dans le même rapport que le volume de cette particule.

On voit donc que, tandis qu'une définition unique se présente à l'esprit lorsqu'il s'agit de fixer la notion générale de *fluide aimanté,* on aperçoit plusieurs manières de définir d'une manière générale le *fluide compressible aimanté,* sans qu'aucun motif prépondérant puisse faire préférer une de ces définitions à l'autre.

Cette ambiguïté cesse lorsqu'on veut traiter des *fluides aimantés dénués de force coercitive;* dans la définition de ces fluides, on est convenu de ne plus imposer aucune restriction aux variations virtuelles de la densité et de l'aimantation.

La définition des fluides compressibles dénués de force coercitive étant complètement donnée, on pourra faire l'étude complète de ces fluides; on ne pourra pas étudier les propriétés des fluides compressibles non dénués de force coercitive tant qu'on n'aura pas convenu de choisir entre les différentes définitions que l'on peut donner de ces corps; mais on peut étudier, et c'est ce que nous allons faire, les propriétés communes à tous les fluides aimantés, puisque l'on a fixé les caractères que l'on regardera comme communs à tous ces corps.

Cette étude n'est pas inutile : outre l'intérêt logique qu'elle présente, elle a une importance pratique; nous verrons, en effet, que tous les phénomènes présentés par les corps diamagnétiques s'expliquent en admettant, avec Edm. Becquerel, l'existence dans tout l'espace d'un fluide aimanté. Mais il serait impossible de représenter quelques-uns de ces phénomènes si l'on voulait que ce fluide fût dénué de force coercitive.

Imaginons qu'un système renferme un fluide aimanté; soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation au point (x, y, z) de ce fluide; soit dv le volume d'un élément de ce fluide tracé autour du point (x, y, z). Cet élément est soumis à des forces étrangères au magnétisme ayant pour composantes

$$\rho X\, dv, \quad \rho Y\, dv, \quad \rho Z\, dv,$$

ρ étant la densité du fluide en un point de l'élément dv, et X, Y, Z étant certaines fonctions de (x, y, z).

Supposons tout d'abord que l'élément dv ait la forme d'une sphère infiniment petite, ayant pour centre le point (x, y, z); imaginons que cette petite sphère, entraînant avec elle son aimantation, éprouve une rotation infiniment petite autour de son centre.

Dans un semblable déplacement, les forces étrangères au magnétisme n'effectuent aucun travail. Si donc le fluide est en équilibre stable, on aura, pour tout déplacement virtuel de ce genre,

$$\delta \mathcal{F}' = 0 \tag{1}$$

et

$$\delta^2 \mathcal{F}' > 0. \tag{2}$$

La rotation de notre petite sphère fait varier de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation au point (x, y, z). On a donc, en désignant par $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de tout le système,

$$\delta \mathcal{F} = \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\delta\mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\delta\mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\delta\mathcal{C} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}}\delta\mathfrak{M}\right] dv.$$

Mais les quantités $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$ ne sont pas quelconques. La petite sphère entraîne son aimantation dont la grandeur ne varie pas, ce qui donne

$$\delta\mathfrak{M} = 0$$

ou

$$\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta\mathcal{C} = 0. \tag{3}$$

On a donc

$$\delta \mathcal{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\delta\mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\delta\mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\delta\mathcal{C}\right) dv, \tag{4}$$

et, moyennant la relation (3), cette quantité doit devenir égale à o.

D'après un principe connu du calcul des variations, il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'on puisse trouver une fonction $\theta(x, y, z)$ telle que l'on ait, en tout point du fluide,

$$\begin{aligned} &\left[\mathcal{A} + \theta(x, y, z)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right]\delta\mathcal{A} \\ +&\left[\mathcal{B} + \theta(x, y, z)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right]\partial\mathcal{B} \\ +&\left[\mathcal{C} + \theta(x, y, z)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right]\partial\mathcal{C} = 0, \end{aligned}$$

quels que soient $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, ce qui exige qu'il existe une fonction $\theta(x, y, z)$ telle que l'on ait, en tout point du fluide,

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -\theta(x, y, z)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = -\theta(x, y, z)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = -\theta(x, y, z)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Un fluide aimanté ne peut être en repos si l'aimantation n'est, en chaque point, tangente à la ligne de force.

De l'égalité (4), on déduit

$$\delta^2\mathcal{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\delta^2\mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\partial^2\mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\delta^2\mathcal{C}\right)dv$$

ou bien, en vertu des égalités (5),

$$\delta^2\mathcal{F} = -\frac{1}{\theta(x, y, z)}(\mathcal{A}\delta^2\mathcal{A} + \mathcal{B}\delta^2\mathcal{B} + \mathcal{C}\delta^2\mathcal{C})\,dv.$$

D'ailleurs, l'égalité (3) donne

$$\mathcal{A}\delta^2\mathcal{A} + \mathcal{B}\delta^2\mathcal{B} + \mathcal{C}\delta^2\mathcal{C} + (\delta\mathcal{A})^2 + (\delta\mathcal{B})^2 + (\delta\mathcal{C})^2 = 0,$$

ce qui permet d'écrire

$$\delta^2\mathcal{F} = \frac{1}{\theta(x, y, z)}[(\delta\mathcal{A})^2 + (\delta\mathcal{B})^2 + (\delta\mathcal{C})^2]\,dv,$$

et transforme l'inégalité (2) en

$$(6)\qquad \theta(x, y, z) > 0.$$

La fonction $\theta(x, y, z)$ est forcément positive.

Ce résultat met de suite en évidence une proposition importante. Les égalités (5) donnent

$$\int \frac{\mathcal{M}^2}{\theta(x, y, z)} dv + \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right) dv = 0, \tag{7}$$

chacune de ces deux intégrations s'étendant au volume entier du fluide.

Supposons que le système soit dépourvu de tout aimant permanent et ne renferme d'autre corps magnétique que le fluide. Dans ce cas, la quantité $\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv$ représente le potentiel magnétique du système et est essentiellement positive, à moins que l'aimantation ne soit nulle en tout point. Il en est de même, en vertu de l'inégalité (6), de la quantité $\int \frac{\mathcal{M}^2}{\theta(x, y, z)} dv$. L'égalité (7) est donc impossible, à moins que l'aimantation ne soit égale à 0 en tout point; d'où le théorème suivant :

Un fluide magnétique quelconque, soustrait à l'action d'aimants, ne peut être en repos si l'aimantation n'est, en tout point, égale à 0.

Ces premiers théorèmes obtenus, nous allons nous poser la question suivante :

A l'intérieur d'un fluide aimanté, nous traçons une surface fermée S. Les divers éléments du fluide que renferme cette surface sont soumis à certaines forces données, étrangères au magnétisme; ces forces qui subsisteraient si l'on réduisait à 0 l'aimantation en chaque point de ses éléments, sont d'origine intérieure à la masse fluide qu'enferme la surface S ou d'origine extérieure. Soient

$$\rho X \, dv, \quad \rho Y \, dv, \quad \rho Z \, dv \tag{8}$$

les composantes de la force extérieure de ce genre appliquée à l'élément dv de densité ρ.

Les corps aimantés extérieurs au fluide que renferme la surface S exercent aussi des forces sur les divers éléments intérieurs à cette surface.

Si $\mathcal{W}(x, y, z)$ est la fonction potentielle magnétique de ces corps aimantés extérieurs à la surface S en un point (x, y, z) de l'élément dv intérieur à la surface S; si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont les com-

posantes de l'aimantation au point (x, y, z), dans toute modification où chaque élément dv se déplacera en entraînant avec lui son aimantation, les forces dont il s'agit effectueront un travail élémentaire qui a pour valeur

$$(9) \qquad d\mathfrak{T} = -\,\delta \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \right) dv,$$

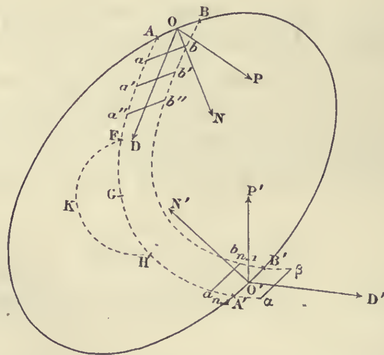
l'intégration s'étendant à tout le volume qu'enferme la surface S.

Imaginons que, *sans rien modifier aux forces extérieures qui viennent d'être énumérées,* on supprime les obstacles que la présence de corps extérieurs à la surface S oppose aux déformations du fluide que cette surface renferme. Sera-t-il possible de maintenir en équilibre le fluide, *supposé incompressible,* que renferme la surface S, au moyen de forces convenablement choisies, appliquées aux divers éléments de la surface S?

Pour résoudre cette question, qui constitue le problème fondamental de l'hydrostatique pour les fluides aimantés, nous suivrons une méthode analogue à celle que M. J. Moutier [1] a employée pour étudier le problème classique de l'Hydrostatique.

Sur la surface S (*fig.* 20), considérons deux éléments quel-

Fig. 20.



conques AB ou dS, et A'B' ou dS'. Le premier est soumis à une force OP ou $P\,dS$, le second à une force O'P' ou $P'\,dS'$.

(1) J. Moutier, *Cours de Physique*, t. I. — P. Duhem, *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrostatique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. IV; 1890).

De l'élément dS à l'élément dS', traçons, à l'intérieur du fluide, un canal infiniment délié de forme quelconque AFGHA′, et prolongeons ce canal d'une petite longueur au delà de A′B′.

Par des sections ab, $a'b'$, $a''b''$, ..., divisons ce canal en tranches infiniment petites, ayant toutes le même volume ω. Formons une dernière tranche de même volume ω dans la partie du canal qui dépasse A′B′. Nous aurons ainsi

$$\text{vol.}\,\text{AB}ab = \text{vol.}\,ab\,a'b' = \ldots = \text{vol.}\,a_{n-1}b_{n-1}\text{A}'\text{B}' = \text{vol.}\,\text{A}'\text{B}'\alpha\beta = \omega.$$

Imaginons que l'on impose au fluide enfermé dans la surface S la modification virtuelle suivante :

Le fluide qui se trouve dans la tranche $a_{n-1}b_{n-1}\text{A}'\text{B}'$ vient occuper la tranche $\text{A}'\text{B}'\alpha\beta$; le fluide qui occupe la tranche précédente vient occuper le volume laissé libre, et ainsi de suite, jusqu'au fluide de la tranche ABab qui vient occuper la tranche $ab\,a'b'$.

Chaque tranche fluide, en se déplaçant, entraîne avec elle son aimantation. On peut supposer que chaque particule fluide, en se déplaçant, n'éprouve aucune rotation. L'aimantation entraînée par chacune d'elles conservera alors non seulement une grandeur invariable, mais encore une orientation invariable dans l'espace.

La modification virtuelle ainsi conçue est compatible avec les liaisons imposées au système ; elle peut être effectuée en sens inverse : il faut donc, pour l'équilibre du fluide, qu'elle n'entraîne aucun travail non compensé, ou, en d'autres termes, que l'on ait

$$\delta\mathcal{F} - d\mathcal{E}_e = 0, \tag{10}$$

$\delta\mathcal{F}$ étant la variation que cette modification fait éprouver au potentiel thermodynamique interne du fluide que renferme la surface S, et $d\mathcal{E}_e$ le travail effectué par les forces extérieures appliquées à ce fluide.

Ces forces sont de trois sortes :

1° Les forces P appliquées à la surface S. Soient

N la normale intérieure en un point de l'élément dS ;
N′ la normale intérieure en un point de l'élément dS' ;
ε la distance normale des deux surfaces AB, ab ;

ε' la distance normale des deux surfaces $A'B'$, α, β;
D la direction Aa;
D' la direction $A'\alpha$.

Ce travail aura pour valeur

$$d\mathfrak{T}' = P\, dS \cos(P, D) \frac{\varepsilon}{\cos(N, D)} - P'\, dS' \cos(P', D') \frac{\varepsilon'}{\cos(N', D')}.$$

Mais on a

$$\varepsilon\, dS = \varepsilon'\, dS' = \omega,$$

$$\cos(P, D) = \cos(P, N)\cos(N, D) + \sin(P, N)\sin(N, D)\cos\widehat{N},$$

$$\cos(P', D') = \cos(P', N')\cos(N', D') + \sin(P', N')\sin(N', D')\cos\widehat{N'}.$$

Le travail précédent s'écrira donc

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{T}' = \big\{ & [\cos(P, N) + \operatorname{tang}(P, N)\sin(N, D)\cos\widehat{N}]P \\ & - [\cos(P', N') + \operatorname{tang}(P', N')\sin(N', D')\cos\widehat{N'}]P' \big\}\, \omega. \end{aligned} \right.$$

2° Les forces dont les composantes sont données par les expressions (8); leur travail aura pour valeur

$$(12)\qquad d\mathfrak{T}'' = \omega \int_{AFGHA'} \rho(X\, dx + Y\, dy + Z\, dz).$$

3° Les forces magnétiques extérieures; leur travail aura pour valeur, d'après l'égalité (9),

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{T} = -\omega \int_{AFGHA'} \Big[& \left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\, \partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\, \partial z} \right) dx \\ & + \left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\, \partial y} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y\, \partial z} \right) dy \\ & + \left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\, \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y\, \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z^2} \right) dz \Big]. \end{aligned} \right.$$

Le travail extérieur $d\mathfrak{T}_e$ a pour valeur

$$(14)\qquad d\mathfrak{T}_e = d\mathfrak{T} + d\mathfrak{T}' + d\mathfrak{T}''.$$

Évaluons maintenant la variation $\delta\mathcal{F}$ subie par le potentiel thermodynamique interne du fluide enfermé dans la surface S.

Si ce fluide n'est pas électrisé, $\mathfrak{F}$ a pour valeur

$$\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathfrak{J} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\, dv,$$

les diverses lettres qui figurent dans cette formule ayant la signification que nous leur attribuons ordinairement; on a donc

$$(15) \qquad \delta\mathfrak{F} = \mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \delta\mathfrak{J} + \delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\, dv.$$

1° Le déplacement considéré est un déplacement sans changement d'état. La quantité

$$-\mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma)$$

représente donc le travail effectué par les forces étrangères au magnétisme et qui sont intérieures au fluide enfermé par la surface S.

La force de ce genre qui agit sur l'élément dv a pour composantes

$$\rho\xi\, dv, \quad \rho\eta\, dv, \quad \rho\zeta\, dv.$$

On aura donc

$$(16) \qquad \mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) = -\,\omega \int_{\mathrm{AFGHA'}} \rho(\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz).$$

2° La grandeur de l'aimantation de chaque particule, son volume, sa nature, demeurant invariables dans la modification considérée, on a

$$(17) \qquad \delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\, dv = 0.$$

3° Reste à évaluer la quantité $\delta\mathfrak{J}$.

Si $\mathcal{V}$ est la fonction potentielle magnétique de l'aimantation distribuée à l'intérieur de la surface S, nous aurons

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv.$$

Pour trouver la variation subie par cette quantité, nous décomposerons en trois phases la modification considérée :

(A). Nous supprimons l'élément ABab : $\mathfrak{J}$ subit une variation

$$(18) \qquad \delta_1 \mathfrak{J} = -\left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\|_{dS} \omega,$$

$\left\|\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right\|_{dS}$ désignant la valeur que prend cette quantité en un point de l'élément dS.

(B). Nous ajoutons au système l'élément $A'B'\alpha\beta$: $\mathfrak{F}$ subit une variation

$$\delta_2\mathfrak{F} = \left\|\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right\|_{dS'}\omega. \tag{19}$$

(C). Nous remplaçons chacune des tranches du filet infiniment délié par la tranche précédente. *Supposons que le fluide ne présente,* dans la région que traverse le filet, *aucune surface de discontinuité;* que l'aimantation varie d'une manière continue tout le long de la ligne AFGHA'. La tranche en un point de laquelle, avant cette opération, l'aimantation avait pour composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ présente, après cette opération, une aimantation dont les composantes sont

$$\mathcal{A} - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}dx - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}dy - \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}dz.$$

$$\mathcal{B} - \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}dx - \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}dy - \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}dz,$$

$$\mathcal{C} - \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}dx - \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y}dy - \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}dz,$$

dx, dy, dz étant les composantes du déplacement d'un point de la tranche considérée. Cette troisième modification impose à $\mathfrak{F}$ une variation

$$\left\{\begin{aligned}\delta_3\mathfrak{F} = -\,\omega\int_{AFGHA'}\Big[&\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right)dx\\ &+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y}\right)dy\\ &+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)dz\Big].\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Nous aurons

$$\delta\mathfrak{F} = \delta_1\mathfrak{F} + \delta_2\mathfrak{F} + \delta_3\mathfrak{F}. \tag{21}$$

Les égalités (11) à (21) nous permettraient de donner une forme explicite à l'égalité (10); mais, auparavant, nous transformerons l'égalité (13) au moyen d'une intégration par parties, et nous

l'écrirons

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} d\mathfrak{F} = \omega \Bigg\{ & \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \right\|_{dS} - \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \right\|_{dS'} \\ & + \int_{\mathrm{AFGHA'}} \Bigg[\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \right) dx \\ & \qquad + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right) dy \\ & \qquad + \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right) dz \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Si nous posons maintenant

$$(24)\qquad \mathcal{V} = \mathfrak{P} + \mathfrak{V},$$

$\mathcal{V}$ étant la fonction potentielle magnétique de toute l'aimantation agissante, les égalités (11) à (24) nous permettront de transformer l'égalité (10) en

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} & \left[\cos(\mathrm{P}, \mathrm{N}) + \mathrm{tang}(\mathrm{P}, \mathrm{N}) \sin(\mathrm{N}, \mathrm{D}) \cos\widehat{\mathrm{N}}\right] \mathrm{P} + \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\|_{dS} \\ & - \left[\cos(\mathrm{P}', \mathrm{N}') + \mathrm{tang}(\mathrm{P}', \mathrm{N}') \sin(\mathrm{N}', \mathrm{D}') \cos\widehat{\mathrm{N}'}\right] \mathrm{P}' - \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\|_{dS'} \\ & + \int_{\mathrm{AFGHA'}} \Bigg\{ \left[\rho(\mathrm{X} + \xi) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \right] dx \\ & \qquad + \left[\rho(\mathrm{Y} + \eta) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right] dy \\ & \qquad + \left[\rho(\mathrm{Z} + \zeta) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right] dz \Bigg\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la forme du canal infiniment délié qui relie, au travers du fluide, les deux éléments dS et dS'. Elle doit donc demeurer vraie si l'on remplace, dans la génératrice AFGHA′ de ce canal, l'arc FGH par l'arc FKH. Il n'est pas malaisé d'en conclure que la quantité sous le signe $\int$ doit être la différentielle totale d'une fonction de x, y, z, continue et uniforme en tout point du fluide.

Supposons en particulier le fluide homogène et incompressible, en sorte que ρ ait, en tout point de ce fluide, la même valeur. Supposons, en outre, que les forces étrangères au magnétisme admettent une fonction potentielle, c'est-à-dire qu'il existe une fonction Ω,

continue et uniforme à l'intérieur du fluide telle que l'on ait

$$(26)\qquad \begin{cases} X + \xi = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ Y + \eta = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ Z + \zeta = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}. \end{cases}$$

Enfin, tenons compte des égalités (5), qui doivent avoir lieu pour que l'équilibre soit possible. La quantité sous le signe $\int$ pourra s'écrire

$$-\rho\, d\Omega - \frac{1}{\theta(x, y, z)}\Big[\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right)dx + \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y}\right)dy + \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)dz\Big],$$

ou bien, en remarquant que

$$\mathcal{A}\, d\mathcal{A} + \mathcal{B}\, d\mathcal{B} + \mathcal{C}\, d\mathcal{C} = \mathfrak{M}\, d\mathfrak{M},$$

$$(27)\qquad -\rho\, d\Omega - \frac{\mathfrak{M}}{\theta(x, y, z)}\, d\mathfrak{M}.$$

Pour que cette quantité soit une différentielle totale, il faut et il suffit que la fonction $\theta(x, y, z)$ ne dépende pas de x, y, z, si ce n'est par l'intermédiaire de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$.

Posons donc

$$(28)\qquad \theta(x, y, z) = \Theta(\mathfrak{M}).$$

Les égalités (5) deviendront

$$(29)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -\Theta(\mathfrak{M})\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = -\Theta(\mathfrak{M})\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = -\Theta(\mathfrak{M})\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Si nous nous souvenons que, d'après l'inégalité (6), la fonction $\theta(x, y, z)$ et, partant, la fonction $\Theta(\mathfrak{M})$ est positive, nous arrivons au résultat suivant :

Lorsqu'un fluide incompressible, homogène, aimanté, dénué

ou non de force coercitive, est en repos, les particules magnétiques y présentent exactement la distribution qu'elles présenteraient dans un corps homogène qui aurait la même forme que ce fluide, serait soumis à l'action des mêmes aimants, serait dénué de force coercitive, et présenterait une fonction magnétisante convenablement choisie $\Theta(\mathfrak{M})$.

Si le fluide est dénué de force coercitive, la comparaison des égalités (29) avec les conditions de l'équilibre magnétique montre que la fonction $\Theta(\mathfrak{M})$ est déterminée et égale à la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$ propre au fluide.

Si, au contraire, le fluide n'est pas dénué de force coercitive, rien dans ce que nous savons jusqu'ici ne nous détermine la fonction $\Theta(\mathfrak{M})$. Nous verrons, au § 3, l'importance de cette remarque.

§ 2. — Pression exercée par un fluide aimanté.

Revenons à l'égalité (25).

La quantité sous le signe $\int$ doit être différentielle totale d'une fonction de x, y, z finie, continue et uniforme à l'intérieur du fluide. Désignons par $-\Pi(x, y, z)$ cette fonction. L'égalité (25) deviendra

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\cos(P, N) + \operatorname{tang}(P, N) \sin(N, D) \cos\widehat{N}\right] P + \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\|_{dS} + \Pi \\ &- \left[\cos(P', N') + \operatorname{tang}(P', N') \sin(N', D') \cos\widehat{N'}\right] P' - \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\|_{dS'} - \Pi' = 0. \end{aligned}\right.$$

Les directions D, D′ sont arbitraires. L'égalité précédente doit donc avoir lieu quelles que soient les quantités

$$\sin(N, D) \cos\widehat{N}, \qquad \sin(N', D') \cos\widehat{N'}.$$

Cela exige que l'on ait

$$\operatorname{tang}(P, N) = 0, \qquad \operatorname{tang}(P', N') = 0.$$

Les forces qu'il faut appliquer aux divers éléments de la surface S *pour maintenir le fluide en équilibre sont donc normales à la surface* S.

Désignons par $P\,dS$ la force normale appliquée à l'élément dS, en la comptant positivement quand elle est dirigée vers l'intérieur du fluide. L'égalité (30) deviendra

$$P + \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\|_{dS} + \Pi - P' - \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\|_{dS'} - \Pi' = 0.$$

Désignons par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ les intensités d'aimantation en un point des éléments dS et dS', tenons compte des égalités (5) et nous verrons sans peine que l'égalité précédente conduit au résultat suivant :

Il existe une quantité K *ayant la même valeur en tout point de la surface* S, *telle que l'on ait, en tout point de cette surface,*

$$(31) \qquad P = K - \Pi + \frac{\mathfrak{M}^2}{\theta(x, y, z)}.$$

Par une démonstration analogue à celle que nous avons indiquée dans notre travail *Sur les Principes fondamentaux de l'Hydrostatique* et que nous ne voulons point reprendre ici, on prouverait que la quantité K doit être choisie de telle façon que le second membre de l'égalité (30) ne prenne de valeur négative en aucun point ni de la surface S, ni du fluide enfermé à l'intérieur de cette surface. On prouverait ensuite que les conditions ainsi trouvées ne sont pas seulement nécessaires, mais suffisantes pour assurer l'équilibre du fluide aimanté en admettant qu'il soit incompressible et que l'aimantation de chaque particule soit invariablement liée à la matière qui forme cette particule.

En un point (x, y, z) intérieur au fluide, le second membre de l'égalité (31) prend une valeur parfaitement déterminée qui est la *pression au point* (x, y, z).

Prenons le cas particulier d'un fluide incompressible homogène. Dans ce cas, on a, d'après l'égalité (28),

$$\theta(x, y, z) = \theta(\mathfrak{M}).$$

D'autre part, la quantité Π doit avoir pour différentielle totale, d'après l'expression (27),

$$\rho\, d\Omega + \frac{\mathfrak{M}}{\theta(x, y, z)}\, d\mathfrak{M}.$$

On peut donc prendre

$$\Pi = \rho\Omega + \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{\Theta(\mathfrak{M})} d\mathfrak{M},$$

et *l'expression de la pression hydrostatique à l'intérieur d'un fluide incompressible, homogène, aimanté, est la suivante :*

$$(32) \qquad P = K - \rho\Omega + \frac{\mathfrak{M}^2}{\Theta(\mathfrak{M})} - \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{\Theta(\mathfrak{M})} d\mathfrak{M}.$$

Si le fluide est dénué de force coercitive, la quantité $\Theta(\mathfrak{M})$ devient identique à la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$. Nous aurons alors

$$\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{\Theta(\mathfrak{M})} d\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathfrak{M}).$$

Si nous posons, comme au Chapitre V, égalité (10),

$$\Psi(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M})} - \mathfrak{F}(\mathfrak{M}),$$

nous aurons pour expression de la pression hydrostatique à l'intérieur d'un fluide aimanté, dénué de force coercitive, homogène et incompressible

$$(33) \qquad P = K - \rho\Omega + \Psi(\mathfrak{M}).$$

Lorsqu'un corps solide est plongé dans un fluide aimanté, on peut traiter l'équilibre de ce corps solide comme s'il était affranchi de toute liaison à condition d'ajouter aux forces données, tant magnétiques qu'étrangères au magnétisme, qui agissent sur lui, des poussées normales dont la grandeur, en chaque point de la surface du solide, est donnée, suivant les cas, par l'une des formules (31), (32) ou (33).

§ 3. — **Expériences de M. P. Joubin.**

Des aimants permanents 1, ayant une position déterminée et une aimantation déterminée ; un corps parfaitement doux 2, ayant une forme déterminée et une position déterminée, sont placés au sein d'un fluide illimité 3 que nous supposons homogène et incompressible, mais qui peut être doué de force coercitive.

Lorsque le fluide est en repos, l'aimantation est la même sur le système que si l'on avait substitué au fluide 3 un fluide homogène, incompressible, dénué de force coercitive, ayant une fonction magnétisante convenablement choisie $\Theta(\mathfrak{M})$.

Si le fluide 3 est dénué de force coercitive, cette fonction $\Theta(\mathfrak{M})$ est identique à sa fonction magnétisante $F_3(\mathfrak{M})$; elle dépend donc uniquement de la nature de ce fluide 3.

Il n'en est plus de même si le fluide 3 est doué de force coercitive. Dans ce cas, la fonction $\Theta(\mathfrak{M})$ peut dépendre non seulement de la nature du fluide 3, de sa forme, de sa position et de l'aimantation des solides auxquels il confine, *mais encore de toute la série des modifications qui ont amené le système à son état actuel.*

Cela posé, prenons le système dans un état déterminé; la fonction $\Theta(\mathfrak{M})$ a une forme déterminée; l'aimantation du fluide 3 et du solide 2 est déterminée; les forces qui agissent sur le solide 2 sont déterminées.

Faisons subir au système une série quelconque de variations, après quoi nous ramenons les aimants permanents 1 à la même position et à la même aimantation, le corps 2 à la même position.

Si le fluide est dénué de force coercitive, le fluide et le solide reprendront la même aimantation qu'ils avaient au départ; les forces exercées sur le solide reprendront la même grandeur et la même direction.

Si, au contraire, le fluide est doué de force coercitive, la nouvelle fonction $\Theta(\mathfrak{M})$ pourra ne pas être identique à la fonction $\Theta(\mathfrak{M})$ primitive; l'aimantation du fluide et du solide, les forces exercées sur le solide ne seront pas forcément les mêmes dans l'état initial et dans l'état final.

Ainsi, *si un corps parfaitement doux, placé dans une position déterminée en présence d'aimants permanents déterminés de position et d'aimantation, est plongé dans un fluide illimité doué de force coercitive, les forces qu'il faut appliquer à ce solide pour le maintenir en équilibre peuvent dépendre de la manière dont le corps est arrivé à sa position, dont les aimants permanents sont arrivés à leur position et à leur aimantation.*

Un seul cas fait exception : c'est celui où le système ne renferme

pas d'aimants permanents. Dans ce cas, il suffira de répéter une démonstration analogue à celle qui a été exposée au § 1 pour arriver à la proposition suivante :

Si un corps parfaitement doux, plongé dans un fluide doué de force coercitive, est soustrait à l'action de tout aimant permanent, il ne peut y avoir de repos dans le système s'il n'est pas entièrement désaimanté.

Nous avons admis, avec M. Edmond Becquerel, que les propriétés des corps diamagnétiques en apparence, tels que le bismuth, devaient s'expliquer en admettant l'existence d'un fluide impondérable, homogène, incompressible ; il suffit de supposer ce fluide doué de force coercitive pour expliquer les expériences suivantes, qui sont dues à M. Paul Joubin [1] :

« Un petit barreau de bismuth, muni d'un léger miroir, était suspendu par un bifilaire entre les deux pôles d'un électro-aimant. Sous l'influence des forces magnétiques et du couple de la suspension, il prenait une nouvelle position d'équilibre *très peu différente de la première,* d'où l'on comptait déduire la valeur du champ. Mais il fut immédiatement évident que, pour ce but, la méthode ne valait rien.

» En effet, pour un même courant, c'est-à-dire pour un même champ, la position du barreau dépendait de la suite des modifications magnétiques qu'on lui avait fait subir. Si l'on trace une courbe en prenant comme abscisse l'intensité du courant et comme ordonnée la déviation, le point figuratif se déplace sur une ligne droite quand on fait croître les intensités de 0 à 40 ampères; mais si, à partir de ce moment, on diminue graduellement le courant, le point se déplace sur une autre ligne droite très inclinée par rapport à la précédente, de telle sorte que, lorsqu'on revient à 15 ampères, la déviation est presque double de celle qui correspondait primitivement au même courant. Si l'on fait croître de nouveau le courant, le point figuratif se déplace sur une troisième droite presque parallèle à la première.

» Si l'on ouvre ensuite le circuit et si l'on recommence l'expé-

---

(1) P. Joubin, *Sur la mesure des champs magnétiques par les corps diamagnétiques* (*Comptes rendus,* t. CVI, p. 735; 1888).

rience, on retrouve la série des déviations représentées par la première droite.

» Le même fait s'est produit avec un simple miroir de verre rectangulaire, qui s'aimante comme le bismuth, mais plus faiblement. L'augmentation du moment magnétique pour un même courant atteignait encore, dans ce cas, le quinzième de sa valeur, changement bien considérable pour pouvoir être attribué à une variation dans la grandeur du champ. »

§ 4. — Forme de la surface de séparation de deux fluides aimantés.

Dans la théorie exposée aux §§ 1 et 2, nous avons supposé que la surface fermée S enveloppait un fluide continu. Il nous est facile maintenant de déterminer les conditions particulières qui sont relatives à une surface de discontinuité séparant deux fluides magnétiques différents.

La pression hydrostatique doit avoir, on s'en assure aisément, la même valeur de part et d'autre de cette surface. Si donc on distingue les quantités relatives aux deux fluides par les indices 1 et 2, on trouve, en vertu de l'égalité (32),

$$K_1 - \Pi_1 + \frac{\mathfrak{M}_1^2}{\theta_1(x, y, z)} = K_2 - \Pi_2 + \frac{\mathfrak{M}_2^2}{\theta_2(x, y, z)},$$

ou bien, en désignant par C_{12} la quantité $K_2 - K_1$, qui a une même valeur en tout point de la surface de séparation considérée,

$$\Pi_2 - \Pi_1 - \left[\frac{\mathfrak{M}_1^2}{\theta_1(x, y, z)} - \frac{\mathfrak{M}_2^2}{\theta_2(x, y, z)}\right] = C_{12}. \tag{34}$$

Si les deux fluides 1 et 2 sont homogènes et incompressibles, cette égalité devient

$$\rho_2\Omega_2 - \rho_1\Omega_1 - \Lambda_2(\mathfrak{M}_2) + \Lambda_1(\mathfrak{M}_1) = C_{12}, \tag{35}$$

en posant, en général,

$$\Lambda(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}^2}{\Theta(\mathfrak{M})} - \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{\Theta(\mathfrak{M})}\, d\mathfrak{M}. \tag{36}$$

Si le fluide 1 est dénué de force coercitive, on devra faire

$$\Lambda_1(\mathfrak{M}_1) = \Psi_1(\mathfrak{M}_1); \tag{37}$$

et, de même, si le fluide 2 est dénué de force coercitive, on devra faire

$$(37\ bis) \qquad A_2(\mathfrak{M}_2) = \Psi_2(\mathfrak{M}_2).$$

Enfin, si les deux fluides s'aimantent conformément à la théorie de Poisson, et si k_1 et k_2 sont leurs coefficients d'aimantation, on aura [Chap. V, égalité (16)]

$$\Psi_1(\mathfrak{M}_1) = \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2k_1}, \qquad \Psi_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2k_2}$$

et l'équation (35) de la surface de séparation des deux fluides deviendra, en tenant compte des égalités (37) et (37 *bis*),

$$(38) \qquad \rho_2\Omega_2 - \rho_1\Omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{M}_2^2}{k_2} - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{k_1}\right).$$

Dans ce dernier cas, on a, en désignant par $\mathfrak{W}$ la fonction potentielle magnétique des aimants permanents, par $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ les fonctions potentielles magnétiques de deux fluides

$$\mathfrak{M}_1^2 = k_1^2\,\mathrm{H}(\mathfrak{W} + \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2),$$
$$\mathfrak{M}_2^2 = k_2^2\,\mathrm{H}(\mathfrak{W} + \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2).$$

Mais, *si les deux fluides sont peu magnétiques,* $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ sont négligeables devant $\mathfrak{W}$; on a simplement

$$\mathfrak{M}_1^2 = k_1^2\,\mathrm{H}\,\mathfrak{W},$$
$$\mathfrak{M}_2^2 = k_2^2\,\mathrm{H}\,\mathfrak{W}$$

et l'égalité (38) devient

$$(39) \qquad \rho_2\Omega_2 - \rho_1\Omega_1 = \frac{k_2 - k_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)^2\right].$$

Cette dernière formule est due à Beer [1].

Faisons une application de ces égalités.

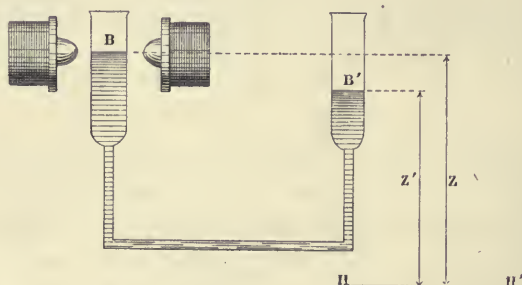
Un tube en U (*fig.* 21) renferme un liquide pesant, de densité ρ_2, dénué de force coercitive, placé dans l'éther magnétique impondérable 1. Il est soumis à l'action d'un champ magnétique de telle

[1] A. BEER, *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik,* p. 217 (Brunswick, 1865).

manière que sa branche B soit plus fortement aimantée que sa branche B'.

Soit HH' un plan horizontal arbitraire. Soit z la distance d'un

Fig. 21.



point quelconque au-dessus de ce plan. On aura, en désignant par g l'intensité de la pesanteur,

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = gz.$$

Soit Z la distance au plan HH' du niveau du liquide dans la branche B; soit Z' la distance au plan HH' du niveau du liquide dans la branche B'.

En un point de la surface de niveau dans la branche B, nous aurons

$$\rho_2 g Z + \Lambda_1(\mathfrak{M}_1) - \Psi_2(\mathfrak{M}_2) = C_{12}.$$

En un point de la surface de niveau dans la branche B', nous aurons

$$\rho_2 g Z' + \Lambda_1(\mathfrak{M}'_1) - \Psi_2(\mathfrak{M}'_2) = C_{12}.$$

D'où, en retranchant membre à membre,

$$(40) \quad \rho_2 g(Z - Z') = \Psi_2(\mathfrak{M}_2) - \Psi_2(\mathfrak{M}'_2) - \Lambda_1(\mathfrak{M}_1) + \Lambda_1(\mathfrak{M}'_1).$$

Il s'établira donc en général, entre les deux branches, une différence de niveau donnée par l'égalité précédente.

Supposons, en particulier, la branche B' située dans une région où le champ magnétique soit peu intense, de telle façon que, dans cette région, les fluides soient peu aimantés. L'égalité précédente se réduira à

$$(41) \qquad \rho_2 g(Z - Z') = \Psi_2(\mathfrak{M}_2) - \Lambda_1(\mathfrak{M}_1).$$

Si la quantité

$$\Psi_2(\mathfrak{M}_2) - \Lambda_1(\mathfrak{M}_1)$$

est positive, le liquide s'élèvera plus dans la branche aimantée que dans l'autre branche; l'inverse aura lieu si la quantité

$$\Psi_2(\mathfrak{M}_2) - \Lambda_1(\mathfrak{M}_1)$$

est négative.

Supposons, pour un instant, que l'éther soit, lui aussi, dénué de force coercitive, et que les deux fluides s'aimantent faiblement et suivant la théorie de Poisson. L'égalité (41) deviendra alors

$$\rho_2 g(Z - Z') = \frac{k_2 - k_1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right].$$

Plücker (¹) a donné des expériences qui s'accordent avec cette relation; Quincke en a fait usage pour déterminer l'excès du coefficient d'aimantation d'un fluide sur le coefficient d'aimantation de l'éther. Cette méthode perd sa valeur si, comme semblent le montrer les expériences de M. Joubin, l'éther n'est pas dénué de force coercitive.

(¹) Plücker, *Experimental Untersuchungen über die Wirkung der Magnete auf gasförmige und tropfbare Flüssigkeiten* (*Poggendorff's Annalen*, t. LXXIII, p. 549; 1848).

CHAPITRE IX.

ACTIONS EXERCÉES SUR LES CORPS PEU MAGNÉTIQUES.

§ 1. — Formule fondamentale.

Imaginons un corps peu magnétique plongé dans un milieu peu magnétique; supposons ces deux corps dénués de force coercitive; soumettons-les à l'action d'aimants permanents puissants. Un semblable système se prête à une étude très complète et très élégante, dont les principes ont été indiqués par Beer [1]. Nous allons exposer ici cette étude dont les conclusions permettent l'interprétation d'un grand nombre de phénomènes physiques.

Quelques-unes des propositions auxquelles nous allons parvenir peuvent s'étendre au cas où le milieu est supposé pourvu de force coercitive; mais nous ne nous arrêterons pas à discuter ce cas.

Supposons un corps parfaitement doux 2 plongé dans un milieu illimité, dénué de force coercitive 3 et soumis à l'action d'aimants permanents 1. Si $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ sont les fonctions potentielles magnétiques des corps 1, 2, 3, le potentiel thermodynamique interne du système, supposé privé d'électricité, sera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) &+ \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial x_3} \right\| dv_3 \\ &+ \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3)}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \int \left\| \mathcal{A}_3 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_3} \right\| dv_3 \\ &+ \int \mathcal{F}_1(\mathfrak{M}_1)\, dv_1 + \int \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2 + \int \mathcal{F}_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_3. \end{aligned}\right.$$

[1] Beer, *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik. Lehre vom Magnetismus,* Ch. VI, p. 213; Brunswick, 1865.

Supposons le corps 2 et le milieu 3 très faiblement magnétiques; nous pourrons, comme nous l'avons vu à la fin du Chapitre VII, négliger, dans l'expression de $\mathfrak{F}$, les termes

$$\int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right\| dv_2, \qquad \int \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial x_2} \right\| dv_2,$$
$$\int \left\| \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_3} \right\| dv_3, \qquad \int \left\| \mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial x_3} \right\| dv_3.$$

Nous pourrons aussi écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= -\, F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}, & \mathcal{A}_3 &= -\, F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_3}, \\ \mathcal{B}_2 &= -\, F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}, & \mathcal{B}_3 &= -\, F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_3}, \\ \mathcal{C}_2 &= -\, F_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}, & \mathcal{C}_3 &= -\, F_3(\mathfrak{M}_3) \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_3}, \end{aligned} \right.$$

équations qui expriment, comme nous l'avons vu au Chapitre VII, que le corps 2 et le milieu 3 s'aimantent comme si chacun d'eux existait seul en présence des aimants permanents.

Si nous posons alors, conformément à l'égalité (10) du Chapitre V,

$$\Psi_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{F_2(\mathfrak{M}_2)} \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2),$$
$$\Psi_3(\mathfrak{M}_3) = \frac{\mathfrak{M}_3^2}{F_3(\mathfrak{M}_3)} \mathfrak{F}_3(\mathfrak{M}_3),$$

l'égalité (1) deviendra

$$\mathfrak{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \int \mathfrak{F}_1(\mathfrak{M}_1)\, dv_1$$
$$-\int \Psi_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2 - \int \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_3.$$

Supposons que l'on déplace infiniment peu le corps 2 dans le milieu 3, et que l'on fasse en même temps varier l'aimantation du corps et du milieu de manière que les conditions d'équilibre demeurent satisfaites; supposons, d'ailleurs, que cette modification ne change rien à l'état physique et chimique des divers éléments du système.

Dans ces conditions, les forces données, intérieures au système et étrangères au magnétisme, effectuent un travail $d\mathfrak{T}_i$ donné par

$$d\mathfrak{T}_i = -\, E\,\delta(\Upsilon - T\Sigma).$$

La quantité

$$\frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} \right\| dv_1 + \int \mathcal{F}_1(\mathfrak{M}_1)\, dv_1$$

n'éprouve aucune variation. On a donc

$$(3) \qquad \delta\mathcal{F} = -\,d\mathcal{E}_i - \delta\int_{v_2} \Psi_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2 - \delta\int_{v_3} \Psi_2(\mathfrak{M}_3)\, dv_3.$$

Cette formule très simple est susceptible d'une légère transformation.

Les formules (2) définissent les quantités $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{C}_3$, $\mathfrak{M}_3$, même pour un point (x_2, y_2, z_2) du volume occupé par le corps 2. Les quantités ainsi définies sont les composantes et la grandeur de l'aimantation qui se produirait au point (x_2, y_2, z_2) si, le corps 2 étant enlevé, on le remplaçait par un fluide de même nature que celui qui remplit l'espace 3.

Considérons la quantité

$$\int_{v_2} \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_2 + \int_{v_3} \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_3.$$

Elle représente la valeur que prendrait la quantité

$$\int \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv,$$

étendue à tout l'espace extérieur aux aimants permanents si l'on supposait cet espace rempli exclusivement par le fluide 3. Cette quantité a une valeur indépendante de la position du volume 2; elle ne varie pas quand on déplace ce volume. On a donc

$$\delta\int_{v_3} \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_3 + \delta\int_{v_2} \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_2 = 0,$$

ce qui permet de remplacer l'égalité (3) par la suivante :

$$(4) \qquad \delta\mathcal{F} = -\,d\mathcal{E}_i - \delta\int_{v_2} [\Psi_2(\mathfrak{M}_2) - \Psi_3(\mathfrak{M}_3)]\, dv_2.$$

Telle est la formule fondamentale sur laquelle reposent les théories que nous allons développer.

§ 2. — Théorème d'Edmond Becquerel.

L'égalité (4) montre que le travail des actions magnétiques qui tendent à déplacer le corps 2 peut être regardé comme exprimé par l'égalité

$$d\tau = \delta \int_{v_2} [\Psi_2(\mathfrak{M}_2) - \Psi_3(\mathfrak{M}_3)]\, dv_2. \tag{5}$$

Si le corps 2 était placé dans la position qu'il occupe par rapport aux aimants permanents, sans être entouré par le milieu 3, les actions magnétiques tendant à déplacer ce corps correspondraient à un travail virtuel dont l'expression, trouvée de la même manière, serait

$$d\tau_2 = \delta \int_{v_2} \Psi_2(\mathfrak{M}_2)\, dv_2.$$

Si le volume 2 était rempli par le fluide 3 et que l'espace qui l'environne fût vide, cette masse de fluide 3 aurait, en chaque point, l'aimantation désignée par $\mathfrak{M}_3$ dans la formule (5). Les actions magnétiques tendant à la déplacer effectueraient un travail virtuel

$$d\tau_3 = \delta \int_{v_2} \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_2.$$

L'égalité (5) peut donc s'écrire

$$d\tau = d\tau_2 - d\tau_3$$

et la proposition qu'elle exprime s'énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'un corps faiblement magnétique est plongé dans un milieu éthéré faiblement magnétique, les actions magnétiques exercées sur le corps parfaitement doux s'obtiennent en composant les actions qui seraient exercées sur ce corps si le milieu magnétique n'existait pas, et les actions égales et directement opposées à celles qui seraient exercées sur une masse d'éther magnétique, remplissant le volume du corps parfaitement doux et supposée isolée du reste de l'éther magnétique.

C'est la loi énoncée presque en même temps (*voir* Chap. VII,

§ 1) par Edmond Becquerel et par Plücker pour un corps plongé dans un fluide magnétique.

§ 3. — Loi de Faraday.

L'égalité (4) prend une nouvelle forme remarquable si le corps et le milieu, tous deux très peu magnétiques, s'aimantent conformément à la théorie de Poisson. Dans ce cas, en effet, si k_2 et k_3 sont les coefficients d'aimantation du corps et du milieu, on a [Chap. V, égalité (16)]

$$\Psi_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2k_2}, \qquad \Psi_3(\mathfrak{M}_3) = \frac{\mathfrak{M}_3^2}{2k_3}.$$

Mais, d'autre part, les égalités (2), où l'on doit remplacer $F_2(\mathfrak{M}_2)$ par k_2 et $F_3(\mathfrak{M}_3)$ par k_3, donnent

$$\mathfrak{M}_2^2 = k_2^2 \Pi \mathfrak{V}_1,$$
$$\mathfrak{M}_3^2 = k_3^2 \Pi \mathfrak{V}_1.$$

On peut donc remplacer l'égalité (4) par la suivante

$$(5)' \qquad \delta\mathcal{F} = -d\mathfrak{E}_i - \frac{k_2 - k_3}{2}\,\delta\int_{v_2} \Pi \mathfrak{V}_1 \, dv_2.$$

Cette forme, démontrée par Beer dans l'Ouvrage que nous avons cité, est riche en conséquences.

Supposons que les seules forces agissantes soient les forces magnétiques, c'est-à-dire que $d\mathfrak{E}_i$ soit constamment égal à o, ainsi que le travail externe. Faisons passer le corps 2 d'une position initiale o à une position finale 1. Le potentiel thermodynamique interne du système subira un accroissement

$$\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 = -\frac{k_2 - k_3}{2}\left[\int \Pi \mathfrak{V}_1 \, dv_2\right]_0^1.$$

Supposons, en particulier, que la position 1 soit infiniment éloignée des aimants permanents. La valeur finale de

$$\int \Pi \mathfrak{V}_1 \, dv_2$$

sera égale à o, et nous aurons

$$\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 = \frac{k_2 - k_3}{2}\left[\int \Pi \mathfrak{V}_1 \, dv_2\right]_0.$$

Comme la quantité $\Pi \mho_1$ est essentiellement positive, on voit que cette variation du potentiel thermodynamique interne est du signe de $(k_2 - k_1)$. Si l'on se souvient d'ailleurs que, pour qu'une modification soit possible, il faut qu'elle corresponde à un travail non compensé positif, on arrive sans peine à la proposition suivante :

Si le coefficient d'aimantation d'un corps est supérieur au coefficient d'aimantation du milieu, ce corps, placé à une très grande distance d'aimants permanents et soumis aux seules forces magnétiques, s'approchera des aimants permanents; placé à distance finie de ces aimants, il ne pourra, sous l'action des seules forces magnétiques, s'en éloigner au delà de toute limite.

L'inverse aura lieu si le coefficient d'aimantation du corps est inférieur à celui du milieu.

La quantité

$$I^2 = \frac{1}{v_2} \int \Pi \mho_1 \, dv_2 \tag{6}$$

représente la valeur moyenne, en un point de l'espace occupé par le corps 2, du carré de l'intensité du champ. Comme le volume v_2 du corps 2 ne varie pas, dans les déplacements qu'on lui fait subir, l'égalité $(5)'$ peut s'écrire

$$\delta \mathcal{F} = - d\mathfrak{T}_i - \frac{k_2 - k_3}{2} v_2 \, \delta I^2 \tag{7}$$

ou bien, dans le cas où les forces magnétiques agissent seules,

$$\delta \mathcal{F} = - \frac{k_2 - k_3}{2} v_2 \, \delta I^2. \tag{7 bis}$$

Si le coefficient d'aimantation du corps est supérieur à celui du milieu, les forces magnétiques tendent à déplacer ce corps de manière à faire croître la valeur moyenne du carré de l'intensité du champ dans l'espace occupé par ce corps. Si le coefficient d'aimantation du corps est inférieur à celui du milieu, les forces magnétiques tendent à déplacer ce corps de manière à faire décroître la valeur moyenne du carré de l'intensité du champ dans l'espace occupé par ce corps.

Faraday avait tout d'abord caractérisé les petits corps diamagnétiques comme des corps repoussés par les aimants permanents, à l'inverse des petits corps magnétiques qui sont attirés par les aimants permanents. Plus tard [1], il proposa de prendre pour caractère distinctif celui-ci : un petit corps magnétique, placé dans un champ magnétique, tend à se mouvoir des points où l'intensité du champ est plus grande à ceux où elle est plus faible ; l'inverse a lieu pour un petit corps diamagnétique. Sir W. Thomson [2] montra que les deux caractères s'expliquaient en admettant, pour les corps diamagnétiques, un coefficient d'aimantation négatif. Nous avons vu que cette explication ne pouvait être admise. Mais les lois énoncées par Faraday s'expliquent aisément, comme nous venons de le voir, si l'on admet l'existence, dans tout l'espace, d'un éther magnétique : *les corps magnétiques en apparence sont ceux dont le coefficient d'aimantation est supérieur à celui du milieu ; les corps diamagnétiques en apparence sont ceux dont le coefficient d'aimantation est inférieur à celui du milieu.* Nous trouvons ainsi la justification de la théorie du diamagnétisme proposée par Edmond Becquerel.

Supposons le volume v_2 du corps 2 très petit; soit (x_2, y_2, z_2) un point de ce volume. L'égalité (7 *bis*) pourra s'écrire, en désignant par δx_2, δy_2, δz_2 les composantes du déplacement de ce point,

$$\delta \mathcal{F} = -\frac{k_2 - k_3}{2} v_2 \left(\frac{\partial \Pi \mathfrak{V}_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \Pi \mathfrak{V}_1}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial \Pi \mathfrak{V}_1}{\partial z_2} \delta z_2 \right).$$

Les actions magnétiques tendent donc à imprimer au corps 2 le même mouvement qu'une force appliquée en un point (x_2, y_2, z_2)

(1) FARADAY, *On new magnetic actions and on the magnetic action of all matter (continued)* (*Experimental researches in electricity*, XXIe série, § 2418. — *Philosophical Transactions*, année 1846, p. 41).

(2) W. THOMSON, *On the forces experienced by small spheres under magnetic influence; and on some of the phenomena presented by diamagnetic substances* (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, mai 1847. — *Papers on electrostatics*, art. XXXIII). — *Remarks on the forces experienced by inductively magnetized ferromagnetic or diamagnetic non-crystalline substances* (*Philosophical Magazine*, octobre 1850. — *Papers on electrostatics*, art. XXXIV).

de ce petit corps, et ayant pour composantes

$$(8)\quad \begin{cases} X_2 = \dfrac{k_2 - k_3}{2} \dfrac{\partial \Pi \mathfrak{V}_1}{\partial x_2} v_2, \\ Y_2 = \dfrac{k_2 - k_3}{2} \dfrac{\partial \Pi \mathfrak{V}_1}{\partial y_2} v_2, \\ Z_2 = \dfrac{k_2 - k_3}{2} \dfrac{\partial \Pi \mathfrak{V}_1}{\partial z_2} v_2. \end{cases}$$

Ces expressions conduisent à un énoncé que l'on peut, sous la forme suivante, étendre à un corps de volume quelconque.

Lorsqu'un corps peu magnétique 2 *est plongé dans un milieu peu magnétique* 3, *les actions magnétiques exercées sur ce corps* 2 *peuvent être remplacées par des forces appliquées à chacun de ses éléments de volume et admettant pour fonction potentielle en chaque point la quantité*

$$-\frac{k_2 - k_3}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z}\right)^2\right].$$

Ces forces admettent pour surfaces de niveau les surfaces isodynamiques du champ.

Ce beau théorème est dû à Beer [1].

§ 4. — Instabilité de l'équilibre d'un corps peu magnétique.

Considérons un corps peu magnétique placé dans un milieu peu magnétique. Deux cas sont à distinguer :

Si le coefficient d'aimantation du corps est supérieur à celui du milieu, le corps est paramagnétique en apparence, ou, pour abréger, *paramagnétique*.

Si le coefficient d'aimantation du corps est inférieur à celui du milieu, le corps est diamagnétique en apparence, ou, pour abréger, *diamagnétique*.

D'après ce qui précède, un corps paramagnétique sera en équilibre stable si la valeur moyenne du carré de l'intensité du champ dans le volume qu'il occupe est plus grande dans la position prise

---

(1) Beer, *loc. cit.*, p. 215.

par ce corps que dans toute position voisine qu'il pourrait prendre sans rompre les liens qui l'assujettissent.

Un corps diamagnétique sera en équilibre stable si la valeur moyenne du carré de l'intensité du champ dans le volume qu'il occupe est moindre dans la position prise par ce corps que dans toute position voisine qu'il pourrait prendre sans rompre les liens qui l'assujettissent.

Ces deux règles ont été indiquées par Sir W. Thomson [1].

Nous avons vu qu'un corps magnétique quelconque, soustrait à l'action de tout milieu et affranchi de tout lien, ne pouvait être en état d'équilibre stable. Cette proposition s'étend-elle à un corps paramagnétique ou diamagnétique lorsque l'on tient compte du milieu dans lequel il est plongé? Cette proposition demeure vraie pour les corps paramagnétiques, mais elle ne l'est plus pour les corps diamagnétiques; c'est ce qui résulte de la proposition suivante :

Si le volume v_2 est susceptible d'éprouver tous les déplacements virtuels concevables autour de sa position actuelle, cette position ne peut correspondre à un maximum de la valeur moyenne I^2 *du carré de l'intensité du champ à l'intérieur du volume v_2; elle peut correspondre à un minimum de la même quantité.*

Cette proposition est due à Sir W. Thomson [2] qui n'en a pas publié la démonstration; on peut la démontrer de la manière suivante :

On a

$$I^2 = \frac{1}{v_2}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right)^2\right] dv_2.$$

Donnons au volume v_2 une *translation* quelconque dont δx,

---

(1) W. Thomson, *On the forces experienced by small spheres under magnetic influences; and on some phenomena presented by diamagnetic substances* (*Cambridge and Dublin mathematical Journal,* may 1847. — *Papers on electrostatics,* art. XXXIII).

(2) W. Thomson, *Remarks on the forces experienced by inductively magnetized ferromagnetic non-crystalline substances. On the stability of small inductively magnetized bodies in positions of equilibrium* (*Philosophical Magazine,* octobre 1850. — *Papers on electrostatics,* art. XXXIV).

δy, δz soient les composantes; I^2 éprouvera une variation

$$\begin{aligned}\delta I^2 = \frac{2}{v_2}\Big[& \delta x \int \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial x_2} \right) dv_2 \\ & + \delta y \int \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial y_2} \right) dv_2 \\ & + \delta z \int \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2} \right) dv_2 \Big].\end{aligned}$$

Si nous redonnons une seconde fois au volume v_2 la même translation, I^2 éprouvera une variation seconde ayant pour expression

$$(9) \quad \delta^2 I^2 = \frac{2}{v_2} \left(A\, \delta x^2 + B\, \delta y^2 + C\, \delta z^2 + 2D\, \delta y\, \delta z + 2E\, \delta z\, \delta x + 2F\, \delta x\, \delta y \right)$$

avec

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned}
A &= \int \Big\{ \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial x_2} \right)^2 \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}}{\partial x_2^3} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial x_2^2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial x_2^2} \right) \Big\} dv_2, \\
B &= \int \Big\{ \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial y_2} \right)^2 \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2^2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^3} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial y_2^2} \right) \Big\} dv_2, \\
C &= \int \Big\{ \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2} \right)^2 \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2^2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2^2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^3} \right) \Big\} dv_2, \\
D &= \int \Big\{ \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2} \right) \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2\, \partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2\, \partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2\, \partial y_2} \right) \Big\} dv_2, \\
E &= \int \Big\{ \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\, \partial x_2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} \right) \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2\, \partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2\, \partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2\, \partial x_2} \right) \Big\} dv_2, \\
F &= \int \Big\{ \left[\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial y_2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} \right) \right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2\, \partial y_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2\, \partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2\, \partial z_2} \right) \Big\} \partial v_2.
\end{aligned} \right.$$

Peut-il se faire que la quantité $\delta^2 I^2$ soit négative pour tout dépla-

cement virtuel, et, en particulier, pour toute translation virtuelle? Il faudrait pour cela, d'après l'égalité (9), que l'on eût

$$A < 0, \quad B < 0, \quad C < 0$$

et, par conséquent,

$$A + B + C < 0.$$

Or les égalités (10) donnent

$$A + B + C = \int \left[\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} \Delta\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} \Delta\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2} \Delta\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right) \right] dv_2$$
$$+ \int \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2}\right)^2 \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial z_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2\, \partial x_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\, \partial y_2}\right)^2 \right] dv_2.$$

Mais, le volume v_2 étant extérieur aux aimants permanents, on a, en tout point de ce volume

$$\Delta \mathcal{V}_1 = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta \mathcal{V}_1 = 0,$$
$$\Delta\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_2} \Delta \mathcal{V}_1 = 0,$$
$$\Delta\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right) = \frac{\partial}{\partial z_2} \Delta \mathcal{V}_1 = 0.$$

La quantité $(A + B + C)$ se réduit donc à une somme de carrés et ne peut jamais être négative. Il est donc bien démontré que, si le volume v_2 est susceptible d'éprouver tous les déplacements virtuels concevables autour de sa position actuelle, cette position ne peut correspondre à un maximum de la valeur moyenne du carré de l'intensité du champ à l'intérieur du volume v_2. En d'autres termes, *un corps paramagnétique délivré de tout lien et soumis aux seules forces magnétiques ne peut être en équilibre stable. Cette conclusion ne s'étend pas aux corps diamagnétiques.*

Si le corps paramagnétique est soumis à certaines liaisons convenablement choisies, il pourra présenter des positions d'équilibre stable. La proposition générale énoncée au début de ce paragraphe conduit sans peine au résultat suivant :

Si deux corps, l'un paramagnétique, l'autre diamagnétique,

de même forme, soumis aux mêmes liaisons, sont placés dans un même champ magnétique, leurs positions d'équilibre seront les mêmes; mais les positions d'équilibre stable de chacun d'eux seront, pour l'autre, des positions d'équilibre instable.

§ 5. — La loi de Faraday s'étend-elle aux petits corps fortement magnétiques? — Critique de la méthode d'arrachement.

Un corps paramagnétique très petit tend toujours à se déplacer, sous l'action des forces magnétiques, des points du champ où l'intensité est grande aux points où elle est plus faible. La même loi est-elle applicable à un corps fortement magnétique, pourvu que ce corps ait un volume très petit? Certains physiciens semblent l'avoir pensé. Il est aisé de voir la source de leur erreur.

Les équations de l'équilibre magnétique sur ce corps sont

$$\mathcal{A}_2 = -k_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial x_2},$$

$$\mathcal{B}_2 = -k_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial x_2},$$

$$\mathcal{C}_2 = -k_2 \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial x_2}.$$

Si le milieu est très faiblement magnétique, on peut négliger les termes $\frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial y_2}$, $\frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial z_2}$.

Le corps aimanté étant très petit, on serait tenté de négliger aussi les termes $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2}$, $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}$. On aurait alors simplement

$$\mathcal{A}_2 = -k_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}, \qquad \mathcal{B}_2 = -k_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}, \qquad \mathcal{C}_2 = -k_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2},$$

et la démonstration établissant la légitimité de la loi de Faraday pour les corps fortement magnétiques très petits s'achèverait sans peine.

Mais il est aisé de voir qu'à l'intérieur d'un corps aimanté très petit 2 les quantités

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}$$

ne sont pas négligeables.

On a en effet, en désignant par N_2, N_3 les deux directions de la

normale à la surface qui limite le volume v_2, l'équation suivante en tout point de cette surface [Livre VII, Chap. III, égalité (9)]

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_3} = 4\pi[\mathcal{A}_2 \cos(N_2, x) + \mathcal{B}_2 \cos(N_2, y) + \mathcal{C}_2 \cos(N_2, z)] + 4\pi[\mathcal{A}_3 \cos(N_3, x) + \mathcal{B}_3 \cos(N_3, y) + \mathcal{C}_3 \cos(N_3, z)]$$

avec

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3.$$

En vertu des conditions de l'équilibre magnétique

$$\mathcal{A}_2 = -k_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2}, \qquad \mathcal{A}_3 = -k_3 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_3},$$

$$\mathcal{B}_2 = -k_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2}, \qquad \mathcal{B}_3 = -k_3 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_3},$$

$$\mathcal{C}_2 = -k_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2}, \qquad \mathcal{C}_3 = -k_3 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_3},$$

cette égalité devient

$$(1 + 4\pi k_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial N_2} + (1 + 4\pi k_3) \frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3)}{\partial N_3} = 0,$$

ou bien, en remarquant que k_3 et $\mathcal{V}_3$ sont très petits et que $\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_3} = 0$,

$$4\pi k_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_2} + (1 + 4\pi k_2) \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_3} = 0.$$

Cette condition exige que $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2}, \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}$ aient, en général, des valeurs finies à l'intérieur du petit corps aimanté; que $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_3}, \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_3}$ aient aussi des valeurs finies au voisinage immédiat de ce petit corps, ces valeurs devenant infiniment petites à une distance finie du petit corps.

La loi de Faraday ne s'étend donc pas, en général, aux corps fortement magnétiques même très petits.

Il est toutefois un cas où, comme l'a montré Sir W. Thomson [1], cette loi s'étend à un corps très petit, même supposé fortement magnétique; c'est le cas où ce corps a la forme d'une sphère très petite.

---

(1) W. Thomson, *On the forces experienced by small spheres under magnetic influence; and on some on the phenomena presented by diamagnetic substances* (*Cambridge and Dublin mathematical Journal,* mai 1847). — *Papers on electrostatics,* art. XXXIII).

Négligeons, en effet, les variations que présente le champ créé par les aimants permanents dans la très petite étendue de cette sphère; négligeons aussi l'influence du milieu très peu magnétique qui l'entoure; les composantes de l'aimantation en un point de la sphère seront [Livre VIII, Chap. II, égalités (7)]

$$\mathcal{A}_2 = -\frac{k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2},$$

$$\mathcal{B}_2 = -\frac{k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2},$$

$$\mathcal{C}_2 = -\frac{k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}.$$

D'après les lois générales qui donnent les forces qui agissent sur un corps aimanté [Livre VII, Chap. I, égalités (12)], on voit que les actions magnétiques exercées sur cette petite sphère se réduiront à une force unique ayant pour composantes

$$X = \frac{k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}\int\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial y_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial z_2}\right)dv_2,$$

$$Y = \frac{k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}\int\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial y_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2^2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\,\partial z_2}\right)dv_2,$$

$$Z = \frac{k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}\int\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial x_2\,\partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial y_2\,\partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1}{\partial z_2^2}\right)dv_2,$$

ou bien, en désignant par R le rayon de la petite sphère,

$$X = \frac{\frac{2}{3}\pi k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}R^3\frac{\partial}{\partial x}\Pi\,\mathcal{V}_1,$$

$$Y = \frac{\frac{2}{3}\pi k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}R^3\frac{\partial}{\partial y}\Pi\,\mathcal{V}_1,$$

$$Z = \frac{\frac{2}{3}\pi k_2}{1+\frac{4}{3}\pi k_2}R^3\frac{\partial}{\partial z}\Pi\,\mathcal{V}_1.$$

Ces égalités, de même forme que les égalités (8), justifient l'extension de la loi de Faraday à une petite sphère fortement magnétique, *dans la limite où le coefficient d'aimantation de cette petite sphère peut être regardé comme constant.*

Considérons un aimant permanent et une petite sphère de fer doux placé au contact de cet aimant. L'aimant exercera sur cette petite sphère une action dont la composante suivant la normale N_e extérieure à l'aimant aura pour valeur

$$N = \frac{\frac{2}{3}\pi k_2}{1 + \frac{4}{3}\pi k_2} R^3 \frac{\partial}{\partial N_e} \text{H}\,\mathcal{V}_1.$$

Pour arracher cette petite sphère, il faudra lui appliquer, dans la direction de la normale N_e, une force

$$F = -\frac{\frac{2}{3}\pi k_2}{1 + \frac{4}{3}\pi k_2} R^3 \frac{\partial}{\partial N_e}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z}\right)^2\right].$$

En déterminant la valeur de cette force d'arrachement aux divers points de l'aimant, on aura des nombres proportionnels aux valeurs de

$$-\frac{\partial}{\partial N_e}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z}\right)^2\right].$$

Jamin [1], qui a fait de nombreuses déterminations de ce genre, croyait obtenir des nombres proportionnels à

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_e}\right)^2$$

et, par conséquent, susceptibles de servir à la détermination de la distribution fictive équivalente à l'aimant. On voit que la *méthode de l'arrachement* est impropre à ce but.

[1] Jamin, *Sur la distribution magnétique* (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1572; 1872). — *Sur la distribution du magnétisme* (*Ibid.*, p. 1672).

CHAPITRE X.

LES SPECTRES MAGNÉTIQUES.

§ 1. — Spectres formés par des poudres faiblement magnétiques.

Lorsqu'on place une feuille de papier dans un champ magnétique et qu'on saupoudre cette feuille de papier avec de la limaille de fer, les parcelles de limaille forment des traînées qui constituent un spectre magnétique. La forme de ces traînées de limaille est donnée par une règle très simple : que l'on trace les *lignes de niveau,* c'est-à-dire les intersections de la feuille de papier et des surfaces de niveau du champ; les traînées de limaille répandues sur la feuille de papier couperont orthogonalement ces lignes de niveau.

M. E. Colardeau (1) a montré que, si l'on employait un champ très intense et si l'on remplaçait la limaille de fer par des poudres médiocrement magnétiques, telles que le fer oligiste cristallisé, soyeux et friable, l'oxyde rouge de fer, l'oxyde des battitures, les divers oxydes de nickel et de cobalt, les traînées qui constituent le spectre magnétique offraient une forme différente. M. Colardeau pense que les traînées de poudre dessinent, dans ce cas, les lignes de niveau elles-mêmes : nous verrons que telle n'en est pas la loi.

Nous commencerons par étudier ces spectres formés par des substances médiocrement magnétiques.

Soient $\mathfrak{V}_1$ la fonction potentielle magnétique des aimants per-

(1) E. Colardeau, *Sur les spectres magnétiques produits au moyen de substances peu magnétiques* (*Journal de Physique,* 2e série, t. VI, p. 83).

manents, $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle magnétique des grains de poudre, $\mathcal{V}_3$ la fonction potentielle magnétique du milieu. Si la poudre et le milieu sont peu magnétiques, les fonctions potentielles $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_3$ seront très petites par rapport à $\mathcal{V}_1$.

Dans ces conditions, une parcelle de volume v_2 sera soumise à une force dont les composantes seront données par les égalités (8) du Chapitre précédent :

$$X_2 = \frac{k_2 - k_3}{2} \frac{\partial \Pi \mathcal{V}_1}{\partial x_2} v_2,$$

$$Y_2 = \frac{k_2 - k_3}{2} \frac{\partial \Pi \mathcal{V}_1}{\partial y_2} v_2,$$

$$Z_2 = \frac{k_2 - k_3}{2} \frac{\partial \Pi \mathcal{V}_1}{\partial z_2} v_2.$$

Supposons $(k_2 - k_3)$ positif et la parcelle assujettie à glisser sur la feuille de papier. Il est aisé, par les formules précédentes, de trouver le sens de la force qui tend à la mettre en mouvement. Traçons, sur la feuille de papier, les *lignes isodynamiques,* c'est-à-dire les intersections de la feuille de papier avec les surfaces isodynamiques du champ magnétique créé par les aimants permanents. La force magnétique tangente au papier qui tend à mouvoir la particule v_2 coupe orthogonalement la ligne isodynamique sur laquelle se trouve cette particule. Si, comme nous le supposerons, $(k_2 - k_3)$ est positif, cas auquel la particule est paramagnétique, cette force est dirigée du côté de la ligne isodynamique où le champ a une intensité plus grande que sur cette ligne même.

Imaginons maintenant que la feuille de papier présente un obstacle : soit une aspérité de la feuille de papier, soit des particules magnétiques qu'une cause quelconque a arrêtées. Il est clair que toute particule magnétique qui viendra buter contre cet obstacle en se trouvant du côté de cet obstacle où l'intensité du champ a la moindre valeur se trouvera arrêtée dans son mouvement. Elle formera elle-même un nouvel obstacle contre lequel viendront buter de nouvelles particules magnétiques ; chaque obstacle se trouvera ainsi le point de départ d'une traînée, située du côté de cet obstacle où l'intensité du champ a la moindre valeur et dont la direction générale sera celle de la normale à la ligne isodynamique passant par l'obstacle.

Ainsi, *dans un spectre formé avec une substance faiblement magnétique, les traînées que la poudre forme sur le papier coupent orthogonalement les lignes isodynamiques.*

§ 2. — Spectres formés par des poudres fortement magnétiques.

Il est beaucoup plus difficile d'étudier rationnellement les spectres formés avec une substance fortement magnétique. Nous ne parviendrons à faire cette étude que dans le cas où le champ créé par les électro-aimants est assez intense pour que les particules de limaille soient aimantées à saturation. Nous supposerons en outre que, bien que l'intensité du champ soit très grande, les variations de cette intensité demeurent finies lorsqu'on passe d'un point à l'autre du champ, et qu'elles sont infiniment petites dans un domaine dont les dimensions sont comparables à celles des grains de limaille.

Les quantités $\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z}$ seront, en tout point, négligeables par rapport à $\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z}$. Quant à la fonction potentielle magnétique du milieu, il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

Les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation en un point d'une particule de fer doux sont données par [Chap. IV, égalités (13) et (14)],

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_2 = -\dfrac{P}{(\mathrm{H}\mathfrak{V}_1)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x}, \\ \mathcal{B}_2 = -\dfrac{P}{(\mathrm{H}\mathfrak{V}_1)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y}, \\ \mathcal{C}_2 = -\dfrac{P}{(\mathrm{H}\mathfrak{V}_1)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z}, \end{cases}$$

P étant une constante.

Soient $\mathfrak{V}_2$ la fonction potentielle magnétique des autres particules de limaille, et $\mathfrak{W}_2$ la fonction potentielle magnétique de l'aimantation distribuée sur cette particule, dont le volume est v_2. Lorsque l'on déplace cette particule, les actions magnétiques qui lui sont appliquées effectuent un travail égal au signe près à la varia-

tion subie par la quantité

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right)dv_2\\ +&\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial z_2}\right)dv_2\\ +\frac{1}{2}&\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\right)dv_2+\int\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)\,dv_2.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (1) nous donnent

$$\mathfrak{M}_2 = \mathrm{P}.$$

La quantité $\mathfrak{M}_2$ ayant une valeur invariable, on aura

$$\delta\int\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)\,dv_2 = 0.$$

Soient δx, δy, δz les composantes de la translation de la particule v_2; $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ les composantes de la rotation. Les variations éprouvées par le premier et le troisième terme de l'expression (2) seront en général de l'ordre de $v_2\delta x$, $v_2\delta y$, ..., $v_2\delta\nu$.

Il en sera de même, en général, de la variation subie par le second terme. Toutefois, il est, à ce dernier énoncé, un cas d'exception. Supposons la particule v_2 située à une très petite distance d'une autre particule v'_2 du même ordre de grandeur. D'après ce que nous avons vu au § 4 du Chapitre précédent, les quantités $\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial y_2}$, $\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial z_2}$, qui ont des valeurs finies au contact immédiat de la particule v'_2, prennent des valeurs très petites de l'ordre de v'_2 à une distance finie de cette particule. Donc, au voisinage de la particule v'_2, les quantités $\delta\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial x_2}$, $\delta\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial y_2}$, $\delta\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial z_2}$ ont des valeurs très grandes de l'ordre de $\frac{1}{v'_2}$. Ainsi, en général, la variation de la quantité (2) est de l'ordre des produits $v_2\delta x$, $v_2\delta y$, ..., $v_2\delta\nu$. Mais, dans le cas particulier où la particule v_2 est très voisine d'une autre particule v'_2, cette variation est de l'ordre des quantités $\frac{v_2}{v'_2}\delta x$, $\frac{v_2}{v'_2}\delta y$, ..., $\frac{v_2}{v'_2}\delta\nu$.

Ainsi, dans les conditions où nous supposons placées les particules de limaille, chacune d'elles subit, en général, des actions magnétiques de l'ordre de sa masse; mais, lorsque deux par-

ticules sont au voisinage l'une de l'autre, chacune d'elles subit des actions magnétiques très grandes par rapport à sa masse. Dans un déplacement virtuel de la particule v_2, ces actions effectuent un travail dont le terme principal peut s'écrire, d'après (1) et (2),

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} d\tau = {} & \frac{P \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x}}{(\Pi \mathcal{V}_1)^{\frac{1}{2}}} \delta \int \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_2}\, dv_2 + \frac{P \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y}}{(\Pi \mathcal{V}_1)^{\frac{1}{2}}} \delta \int \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y_2}\, dv_2 \\ & + \frac{P \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z}}{(\Pi \mathcal{V}_1)^{\frac{1}{2}}} \delta \int \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z_2}\, dv_2. \end{aligned} \right.$$

Soit F_1 l'action magnétique exercée au point (x_2, y_2, z_2) par les aimants permanents. Cette action a pour composantes

$$-\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}, \quad -\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}, \quad -\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}.$$

Si la particule v_2 se meut seulement au voisinage de la particule v'_2, cette force conserve une direction sensiblement invariable pour tous les points (x_2, y_2, z_2) que l'on a à considérer.

Soit F_2 l'action magnétique exercée au même point (x_2, y_2, z_2) par la particule v'_2. Cette action a pour composantes

$$-\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_2}, \quad -\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y_2}, \quad -\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z_2}.$$

L'égalité (3) peut alors s'écrire

$$d\tau = P\,\delta \int F_2 \cos(F_2, F_1)\, dv_2.$$

La particule v_2 devra donc, pour l'équilibre, se placer au voisinage de la particule v'_2, de telle façon que la quantité

$$(4)\qquad \int F_2 \cos(F_2, F_1)\, dv_2$$

ait une valeur maximum.

Au voisinage d'une particule de limaille de position donnée v'_2, une autre particule de limaille v_2 est en équilibre lorsque la valeur moyenne, dans le volume v_2, de la composante suivant les lignes de force du champ de la force ma-

gnétique engendrée par la particule v'_2 a une valeur maximum.

Si la particule v_2 n'était assujettie à aucune liaison, cette condition exigerait qu'elle vînt se placer immédiatement au contact de la particule v'_2.

Supposons, en effet, la particule v_2 située à une distance petite, mais non nulle, de la particule v'_2 et soustraite d'ailleurs à toute liaison. Donnons-lui deux fois de suite la translation $(\delta x, \delta y, \delta z)$, qui sera possible quels que soient $\delta x, \delta y, \delta z$. Il est aisé de voir que la quantité (4) éprouvera une variation seconde de la forme

$$A\,\delta x^2 + B\,\delta y^2 + C\,\delta z^2 + 2D\,\delta y\,\delta z + 2E\,\delta z\,\delta x + 2F\,\delta x\,\delta y,$$

les quantités A, B, C, D, E, F ayant des expressions faciles à écrire si on les réduit à leurs termes principaux.

Pour que la quantité (4) eût une valeur maxima, il faudrait que l'on ait

$$A < 0, \qquad B < 0, \qquad C < 0$$

et, par conséquent,

$$A + B + C < 0.$$

Or il est aisé de voir que l'on a

$$(\Pi \mho_1)^{\frac{1}{2}}(A + B + C) = \frac{\partial \mho_1}{\partial x_2}\int \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\varphi_2\, dv_2 + \frac{\partial \mho_1}{\partial y_2}\int \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta\varphi_2\, dv_2 + \frac{\partial \mho_1}{\partial z_2}\int \frac{\partial}{\partial z_2}\Delta\varphi_2\, dv_2.$$

Mais on a, en tout point du volume v_2,

$$\Delta\varphi_2 = 0,$$

et, partant,

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\varphi_2 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y_2}\Delta\varphi_2 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z_2}\Delta\varphi_2 = 0,$$

ce qui donne

$$A + B + C = 0.$$

La quantité (4) ne peut donc être minimum tant que la particule v_2 n'est pas venue s'accoler à la particule v'_2.

Lorsque la particule v_2, au lieu d'être affranchie de tout lien, est assujettie à se mouvoir à la surface du papier sur lequel se forme le spectre, il devient fort difficile de donner aucun théo-

rème général sur la position d'équilibre de cette particule. Pour obtenir quelques résultats précis, il est nécessaire de particulariser le problème. Si, par exemple, les deux particules v_2 et v'_2 ont la forme de deux sphères, dont l'une, v'_2, est arrêtée, tandis que l'autre, v_2, se meut dans son voisinage, en cherchant la condition pour que la quantité (4) soit maximum, on trouvera que la sphère v_2 doit toucher la sphère v'_2, et que la ligne qui joint le centre de la sphère v_2 au centre de la sphère v'_2 doit avoir même direction et même sens que la projection de l'intensité du champ sur le plan du papier.

Cette proposition fait comprendre pourquoi les particules de limaille s'accolent les unes aux autres et dessinent des traînées qui coupent normalement les lignes de niveau.

Nous avons traité les spectres magnétiques dans deux cas extrêmes : celui où la poudre employée à former le spectre est peu magnétique, et celui où elle se compose de grains fortement magnétiques aimantés à saturation. Les cas intermédiaires, impossibles à étudier théoriquement, peuvent donner lieu, comme l'a montré M. E. Colardeau, à des spectres complexes formés par la superposition des deux genres de spectre que nous venons d'étudier.

CHAPITRE XI.

CHALEUR ET AIMANTATION.

§ 1. — Chaleur mise en jeu dans le déplacement d'une masse magnétique.

On sait (Livre IV, Chap. I, p. 341) que l'énergie interne U d'un système est liée à son potentiel thermodynamique interne $\mathfrak{F}$ par la relation

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{EU} = \mathfrak{F} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{T}}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par $d\mathrm{Q}$ la quantité de chaleur dégagée par le système dans une modification quelconque; par $d\mathfrak{G}_e$ le travail effectué par les forces extérieures; par $\delta \sum \frac{mv^2}{2}$ l'accroissement de la force vive du système, le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail s'exprime par

$$\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = -\,\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + d\mathfrak{G}_e.$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (1), donne

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q} + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = \delta\left(\mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{T}}\right) - \delta\mathfrak{F} + d\mathfrak{G}_e.$$

Si la modification est isothermique et réversible, on a

$$\delta\mathfrak{F} - d\mathfrak{G}_e = 0,$$

$$\delta \sum \frac{mv^2}{2} = 0$$

et l'égalité précédente devient

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = \delta\left(\mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{T}}\right).$$

Faisons l'application de ces formules à quelques cas particuliers intéressants.

1° *Un aimant permanent se meut dans un milieu non magnétique sous l'action de forces extérieures et d'autres aimants permanents.*

Soient $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de notre aimant et $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique des autres aimants. La seule partie variable du potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ est la quantité

$$\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv,$$

l'intégration s'étendant à l'aimant mobile. Dans cet aimant, le magnétisme sera supposé indépendant même de la température. Dès lors, la quantité précédente ne dépend pas de la température absolue T. L'égalité (2) se réduit donc ici à

$$\mathrm{E}\, d\mathrm{Q} + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = d\mathfrak{T}_e - \delta \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv.$$

D'ailleurs, on a, dans les conditions où nous sommes placés,

$$\delta \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv = - d\mathfrak{T}_i,$$

$d\mathfrak{T}_i$ étant le travail effectué par les actions des aimants permanents immobiles sur l'aimant permanent mobile. On a donc

$$\mathrm{E}\, d\mathrm{Q} + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_i,$$

égalité qu'aurait pu faire prévoir le principe des déplacements sans changement d'état.

2° *Un corps parfaitement doux, non plongé dans un milieu magnétique, est placé en présence d'aimants permanents. Des liens le maintiennent immobile. A un instant donné, on supprime les liens. Le corps se précipite vers les aimants permanents. Dans sa course, il rencontre un calorimètre où sa force vive vient s'amortir. Quelle est la quantité de chaleur cédée à ce calorimètre?*

Soient A l'état initial du système et B l'état final.

Dans l'état initial comme dans l'état final, on a

$$\sum \frac{mv^2}{2} = 0.$$

L'égalité (2) donne donc

$$EQ = \mathfrak{F}_A - \left(T \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}\right)_A - \mathfrak{F}_B + \left(T \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}\right)_B + \int_A^B d\mathfrak{T}_e.$$

L'état physique et chimique du fer doux étant le même dans l'état initial et dans l'état final, on aura

$$\mathfrak{F}_A - \mathfrak{F}_B = \mathfrak{I}_A - \mathfrak{I}_B + \left[\int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\, dv\right]_A - \left[\int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\, dv\right]_B.$$

$$T\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}\right)_A - T\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}\right)_B = \int \left[\frac{\partial}{\partial T}\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_A, T) - \frac{\partial}{\partial T}\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_B, T)\right] dv.$$

On a donc

$$\begin{aligned} EQ = \mathfrak{I}_A - \mathfrak{I}_B &+ \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_A, T) - T \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_A, T)}{\partial T}\right] dv \\ &- \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_B, T) - T \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_B, T)}{\partial T}\right] dv + \int_A^B d\mathfrak{T}_e. \end{aligned}$$

Supposons en particulier que la position initiale soit très éloignée des aimants permanents, de telle sorte que l'on ait sensiblement

$$\mathfrak{M}_A = 0.$$

On aura aussi sensiblement

$$\int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_A, T) - T \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_A, T)}{\partial T}\right] dv = 0,$$

$$\mathfrak{I}_B - \mathfrak{I}_A = \int \left\| \mathfrak{A}_B \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv + \frac{1}{2} \int \left\| \mathfrak{A}_B \frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial x} \right\| dv.$$

On a donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} EQ = &- \int \left\| \mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv - \frac{1}{2} \int \left\| \mathfrak{A} \frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial x} \right\| dv \\ &- \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right] dv + \int_B^A d\mathfrak{T}_e. \end{aligned} \right.$$

Les trois premiers termes se rapportent à la position finale de l'aimant.

Nous avons vu [Chap. V, égalité (11)] que l'on avait

$$\int \left\| \mathfrak{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv + \frac{1}{2} \int \left\| \mathfrak{A} \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x} \right\| dv + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)\, dv$$
$$= -\frac{1}{8\pi} \int \Pi \mathcal{O}\, dv - \int \Psi(\mathfrak{M}, T)\, dv,$$

la première intégrale s'étendant à tout le système et la seconde au fer doux; la fonction $\Psi(\mathfrak{M}, T)$, définie par l'égalité (10) du même Chapitre, est positive pour les corps magnétiques.

D'autre part,

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, T)}\, d\mathfrak{M}.$$

On a donc

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} EQ = \frac{1}{8\pi} \int \Pi \mathcal{O}\, dv + \int \Psi(\mathfrak{M}, T)\, dv \\ - T \int \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F^2(\mathfrak{M}, T)} \frac{\partial F(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\, d\mathfrak{M}\, dv + \int_A^B d\mathfrak{T}_e. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité nous montre que, *si la fonction magnétisante diminue, demeure constante, ou augmente faiblement quand la température croît, la chaleur dégagée surpasse la chaleur équivalente au travail des forces extérieures.*

Si la théorie de Poisson est applicable au corps parfaitement doux considéré, on a

$$\Psi(\mathfrak{M}, T) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2k(T)}, \qquad F(\mathfrak{M}, T) = k(T),$$

et l'égalité précédente devient

$$(6) \quad EQ = \frac{1}{8\pi} \int \Pi \mathcal{O}\, dv + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(T)} - T \frac{d}{dT} \frac{1}{k(T)} \right] \int \mathfrak{M}^2\, dv + \int_A^B d\mathfrak{T}_e.$$

3° *Un corps parfaitement doux* 2 *est plongé dans un milieu magnétique* 3. *Il est soumis à l'action d'aimants permanents* 1 *et de forces extérieures quelconques. Il se meut sans éprouver aucun frottement. On suppose que la distribution magnétique est, à chaque instant, sur le corps et dans le milieu, celle qui conviendrait à l'équilibre si l'on arrêtait le corps dans la position qu'il occupe à cet instant. Quelle quantité de chaleur est, à chaque instant, dégagée par le système dont la température demeure invariable?*

Si l'on désigne par $d\mathfrak{T}_i$ le travail effectué par les forces intérieures pendant le temps dt, on aura

$$\delta \sum \frac{mv^2}{2} = d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_i,$$

et l'équation (2) deviendra

$$(7) \qquad \mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = -\delta\left(\mathcal{F} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}\right) - d\mathfrak{T}_i.$$

Désignons par $\delta_1 \mathcal{F}$ la variation que subirait le potentiel thermodynamique interne pendant le temps dt, si les paramètres qui fixent la position des diverses parties du système variaient seuls, les autres paramètres, qui fixent leur aimantation, leur état physique et chimique, demeurant invariables. Désignons par $\delta_2 \mathcal{F}$ la variation que subirait le potentiel thermodynamique interne du système si, au contraire, ces derniers paramètres variaient seuls. Nous aurons, d'une part,

$$\delta \mathcal{F} = \delta_1 \mathcal{F} + \delta_2 \mathcal{F},$$

et, d'autre part, le principe des déplacements sans changement d'état nous donne

$$d\mathfrak{T}_i = -\delta_1 \mathcal{F}.$$

L'égalité (7) deviendra donc

$$\mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = -\delta_2 \mathcal{F} + \mathrm{T}\,\delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}.$$

Mais, à chaque instant, l'état d'aimantation du système est précisément celui qui convient à l'équilibre. On a donc, à chaque instant,

$$\delta_2 \mathcal{F} = 0$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad \mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = \mathrm{T}\,\delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}},$$

équation de même forme que l'équation (3) qui convient à un phénomène réversible, bien que la transformation considérée en ce moment soit réalisable et, par conséquent, non réversible.

Le potentiel magnétique ne dépendant pas de la température, on a simplement

$$\delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}} = \int \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2\, \partial \mathrm{T}}\, \delta \mathfrak{M}_2\, dv_2 + \int \frac{\partial^2 \mathcal{F}_3(\mathfrak{M}_3, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_3\, \partial \mathrm{T}}\, \delta \mathfrak{M}_3\, dv_3.$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_2} = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})},$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_3, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}_3} = \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathrm{F}_3(\mathfrak{M}_3, \mathrm{T})}.$$

L'égalité (8) devient donc

$$(9) \quad \mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{T}}{2}\left\{\int \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\left[\frac{1}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}\right]\delta\mathfrak{M}_2\, dv_2 + \int \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\left[\frac{1}{\mathrm{F}_3(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}\right]\delta\mathfrak{M}_3\, dv_3\right\}.$$

Supposons d'abord le *milieu non magnétique*. L'égalité (9) deviendra simplement

$$\mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{T}}{2}\int \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\left[\frac{1}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T})}\right]\delta\mathfrak{M}_2\, dv_2.$$

Si les variations de la fonction magnétisante sont de même sens que les variations de la température, le corps dégagera de la chaleur quand son aimantation diminuera et en absorbera quand son aimantation augmentera. L'inverse aura lieu si les variations de la fonction magnétisante ne sont pas de même sens que les variations de la température.

Supposons ensuite le corps et le milieu tous deux faiblement magnétiques et l'aimantation de tous deux donnée par la théorie de Poisson. Nous aurons en premier lieu, en désignant par $k_2(\mathrm{T})$, $k_3(\mathrm{T})$ leurs coefficients d'aimantation,

$$\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2, \mathrm{T}) = k_2(\mathrm{T}),$$
$$\mathrm{F}_3(\mathfrak{M}_3, \mathrm{T}) = k_3(\mathrm{T}).$$

Nous aurons, en outre,

$$\mathfrak{M}_2^2 = k_2^2(\mathrm{T})\,\Pi\,\mathcal{V}_1,$$
$$\mathfrak{M}_3^2 = k_3^2(\mathrm{T})\,\Pi\,\mathcal{V}_1.$$

Nous aurons donc, au lieu de l'égalité (9), l'égalité

$$(10) \quad \mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = -\frac{\mathrm{T}}{2}\frac{d k_2(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\,\delta\int \Pi\,\mathcal{V}_1\, dv_2 - \frac{\mathrm{T}}{2}\frac{d k_3(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\,\delta\int \Pi\,\mathcal{V}_1\, dv_3.$$

Or, dans l'ensemble de l'espace $(v_2 + v_3)$, la fonction $\mathcal{V}_1$ est harmonique. Si donc nous désignons par $d\mathrm{S}_1$ un élément de la surface du corps **1**, par N_3 la normale à cet élément vers l'intérieur

du milieu 3, nous aurons

$$\int \Pi \mho_1 \, dv_2 + \int \Pi \mho_1 \, \partial v_3 + \mathop{\mathrm{S}} \mho_1 \frac{\partial \mho_1}{\partial N_3} dS_1 = 0.$$

On déduit aisément de là que, dans tout déplacement de la masse 2, on a

$$\delta \int \Pi \mho_1 \, dv_2 + \delta \int \Pi \mho_1 \, dv_3 = 0.$$

L'égalité (10) devient donc

$$\text{(11)} \qquad E\, dQ = -\frac{T}{2} \frac{d}{dT} [k_2(T) - k_3(T)] \delta \int \Pi \mho_1 \, dv_2.$$

Soit V le volume du corps 2. Soit J^2 la valeur moyenne du carré de l'intensité du champ dans l'espace occupé par le corps 2.

Nous aurons

$$J^2 V = \int \Pi \mho_1 \, dv_2.$$

L'égalité (11) prend donc, en dernière analyse, la forme suivante

$$E\, dQ = -\frac{T}{2} \frac{d}{dT} [k_2(T) - k_3(T)] V \, \delta J^2.$$

Cette égalité peut s'énoncer de la manière suivante :

Un champ magnétique, engendré par des aimants permanents, est rempli par un milieu peu magnétique dans lequel plonge un corps peu magnétique. On déplace ce corps de manière que la moyenne du carré de l'intensité du champ aux divers points de l'espace qu'il occupe aille en croissant. Si l'excès du coefficient d'aimantation du corps sur le coefficient d'aimantation du milieu décroît quand la température croît, la modification entraîne un dégagement de chaleur. Elle entraîne une absorption de chaleur si le même excès croît avec la température.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir ont été énoncés en 1878 par Sir W. Thomson ([1]). En 1883, MM. E. Warburg et

---

([1]) Sir W. Thomson, *On the thermoelastic, thermomagnetic and pyroelectric properties of matter*, § 2 (*Philosophical Magazine*, 5e série, t. V, p. 4; 1878).

L. Hönig (1) les représentèrent par une formule qui n'est point exacte. La première démonstration exacte a été donnée en 1889 par M. Paul Janet (2).

§ 2. — Chaleur spécifique d'un corps aimanté.

Plusieurs auteurs (3) ont étudié l'influence que l'aimantation exerce sur la chaleur spécifique du fer. Il est aisé d'étudier cette influence pour la chaleur spécifique *sous volume constant*. Celle-ci, en effet, est liée à l'énergie interne par cette relation très simple

$$\varpi c = \frac{\partial U}{\partial T},$$

ϖ étant la masse du corps.

Si l'on se reporte à l'égalité (1), cette relation devient

$$E\varpi c = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} - T\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2}.$$

D'après une transformation analogue à celle que nous avons fait subir à l'égalité (4), si l'on désigne par γ la chaleur spécifique du fer non aimanté, on a

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} E\varpi(c-\gamma) &= -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial T}\int \Pi\,\mho\,dv - \frac{\partial}{\partial T}\int \Psi(\mathfrak{M}, T)\,dv \\ &\quad + T\frac{\partial T}{\partial}\int\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F^2(\mathfrak{M}, T)}\,\frac{\partial F(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\,d\mathfrak{M}\,dv. \end{aligned} \right.$$

---

(1) E. Warburg et L. Hönig, *Ueber die Wärme, welche durch periodisch wechselnde magnetisirende Kräfte im Eisen erzeugt wird* (*Wiedemann's Annalen*, t. XX, p. 814; 1883).

(2) Paul Janet, *Sur la chaleur de combinaison du fer dans un champ magnétique et sur les phénomènes thermomagnétiques* (*Journal de Physique*, 2e série, t. VIII, p. 312; 1889).

(3) J. Stefan, *Ueber die Gesetze der elektrodynamischen Induction* (*Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. zu Wien*, LXIV, 2e Abtheil, p. 193; 1871). — A. Wassmuth, *Ueber die specifische Wärme des stark magnetisirten Eisens und das mechanische Æquivalent einer Verminderung des Magnetismus durch die Wärme* (*Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. zu Wien*, LXXXV, 2e Abtheil., p. 997; 1882). — *Ueber eine Anwendung der mechanischen Wärme-theorie auf den Vorgang der Magnetisirung* (*Ibid.*, LXXXVI, 2e Abtheil., p. 539, 1882). — *Ueber die bei Magnetisirung erzeugte Wärme* (*Ibid.*, LXXXIX, 2e Abtheil, p. 104; 1884). — J. Stefan, *Ueber thermomagnetische Motoren* (*Wiedemann's Annalen*, Bd. XXXVIII, p. 427; 1889).

Deux cas sont à distinguer :

1° Veut-on calculer la véritable chaleur spécifique du fer aimanté, c'est-à-dire la quantité c telle que $c\,d\mathrm{T}$ représente la chaleur qu'il faut fournir au fer pour élever sa température de $d\mathrm{T}$ sans modifier son volume *ni son aimantation?* Les dérivées par rapport à T qui figurent en dehors des signes $\int$ sont alors de véritables dérivées partielles; on a

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\int \Pi \mathfrak{V}\, dv = 0$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{E}\varpi(c-\gamma) = -\int \left\{ \frac{\partial \Psi(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}} - \frac{\mathrm{T}}{2}\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{T}^2}\left[\frac{1}{\mathrm{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}\right] d\mathfrak{M}^2 \right\} dv.$$

Si le corps suit la théorie de Poisson, on a

$$\Psi(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2k(\mathrm{T})},$$
$$\mathrm{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) = k(\mathrm{T}),$$

et l'égalité précédente devient

$$(13) \quad \mathrm{E}\varpi(c-\gamma) = \frac{1}{2}\left\{ \mathrm{T}\frac{d^2}{d\mathrm{T}^2}\left[\frac{1}{k(\mathrm{T})}\right] - \frac{d}{d\mathrm{T}}\left[\frac{1}{k(\mathrm{T})}\right] \right\} \int \mathfrak{M}^2\, dv.$$

Si le corps est peu magnétique, on a

$$\mathfrak{M}^2 = k^2(\mathrm{T})\,\Pi \mathfrak{V},$$

et l'égalité (13) devient

$$(13\ bis) \quad \mathrm{E}\varpi(c-\gamma) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{dk(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} - \mathrm{T}\frac{d^2k(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}^2} + \frac{2\mathrm{T}}{k(\mathrm{T})}\left[\frac{dk(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\right]^2 \right\} \int \Pi \mathfrak{V}\, dv.$$

2° Veut-on, au contraire, supposer que $c\,d\mathrm{T}$ est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de $d\mathrm{T}$ la température du fer, *son aimantation variant par le fait de la modification que le changement de température apporte au coefficient d'aimantation.*

Dans ce cas, les différentiations par rapport à la température qui figurent hors des signes $\int$ dans l'égalité (12) doivent être prises en tenant compte de l'influence de T sur l'aimantation. Le résultat devient beaucoup plus compliqué.

Supposons le corps faiblement magnétique, de façon à pouvoir négliger le terme

$$\frac{\partial}{\partial T}\int \mathrm{H}\mathfrak{V}\, dv,$$

qui est de l'ordre de $\int \mathfrak{M}^2\, dv$, tandis que les autres, si l'on admet la théorie de Poisson, sont de l'ordre de $\frac{\mathfrak{M}^2}{k(T)}$. Remarquons en outre que

$$\Psi(\mathfrak{M}, T) = \frac{2k(T)}{\mathfrak{M}^2} = \frac{k(T)}{2}\mathrm{H}\mathfrak{V},$$

$$\mathfrak{M}^2 = k^2(T)\mathrm{H}\mathfrak{V},$$

$$F(\mathfrak{M}, T) = k(T),$$

et l'égalité (12) deviendra

$$(14) \qquad E\varpi(c-\gamma) = \frac{1}{2}\left[T\frac{d^2k(T)}{dT^2} - \frac{dk(T)}{dT}\right]\int \mathrm{H}\mathfrak{V}\, dv.$$

Les deux valeurs de c, données par les égalités (13 *bis*) et (14), sont différentes l'une de l'autre; elles diffèrent d'ailleurs de celles que les auteurs ont proposées.

Quant à l'étude de la chaleur spécifique sous pression constante du fer placé dans un champ magnétique, elle est si compliquée que nous ne voulons point l'aborder ici.

Ce serait ici le lieu de parler de l'influence que le Magnétisme exerce sur les phénomènes chimiques; cette influence, mise en évidence par les expériences de M. Ira Remsen [1] et de M. Rowland [2], a donné lieu aux recherches théoriques de M. Th. Gross [3],

---

(1) Ira Remsen, *Action chimique dans un champ électrique* (*La Lumière électrique*, t. IV, p. 126; 1881). — H.-V. Jueptner, *L'influence du magnétisme sur les métaux au point de vue électrolytique* (*La Lumière électrique*, t. X, p. 469; 1883).

(2) *Voir* Oliver J. Lodge, *Sketch of the principal electrical papers read before Section A during the late meeting of the British Association at Manchester* 1887 (*Electrical Review*, 23 septembre 1887).

(3) Th. Gross, *Ueber eine neue Entstehungsweise galvanischer Ströme durch Magnetismus* (*Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. zu Wien*, XCII, 2e Abtheil., p. 1373; 1885). — *Ueber die Verbindungswärme des magnetisirten Eisens* (*Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin*, 22 avril 1887).

de M. Nichols [1], de M. Paul Janet [2]. Mais nous craindrions, en exposant ici la théorie de ces actions, d'étendre outre mesure les dimensions du présent Volume. Nous demanderons donc au lecteur de se reporter aux travaux que nous venons de citer et à ce que nous avons dit ailleurs [3] sur ce sujet. Nous ne parlerons pas non plus des changements de concentration que le voisinage d'un aimant fait éprouver à une dissolution renfermant un sel magnétique. Nous avons consacré à l'étude de cette question un Mémoire [4] auquel nous renverrons le lecteur.

---

(1) Nichols, *On the chemical beaviour of iron in the magnetic field* (*Silliman's Journal*, 3e série, t. XXXI; 1886).

(2) P. Janet, *De l'influence du magnétisme sur les phénomènes chimiques* (*Journal de Physique*, 2e série, t. VI, p. 286; 1887). — *Sur la chaleur de combinaison du fer dans un champ magnétique et sur les phénomènes thermomagnétiques* (*Journal de Physique*, 2e série, t. VIII, p. 312; 1889).

(3) *Sur l'aimantation par influence*, Chapitre VI, § 2 et 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, p. D.98).

(4) *Sur les dissolutions d'un sel magnétique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VIII, p. 289; 1890).



LIVRE X.

L'AIMANTATION DES CORPS CRISTALLISÉS.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE MAGNÉTIQUE SUR LES CORPS CRISTALLISÉS.

§ 1. — **Historique.**

Nous avons étudié en détail le problème de l'aimantation par influence des corps isotropes; nous avons maintenant à revenir au cas général de ce même problème, à l'étude de l'aimantation par influence des corps non isotropes quelconques, et en particulier des corps cristallisés.

Poisson avait indiqué les caractères qui distinguent l'induction magnétique des corps cristallisés de l'induction magnétique des corps isotropes vingt-trois ans avant qu'un expérimentateur songeât à vérifier ses prévisions.

Nous avons vu (Livre VIII, Chap. I, § 1) comment Poisson était parvenu à mettre en équation le problème de l'aimantation par influence des corps parfaitement doux en admettant l'existence de particules magnétiques et en supposant en outre que, pour les corps isotropes, ces particules avaient la forme sphérique. Mais, pour les corps cristallisés, ces particules peuvent avoir une forme différente de celle de la sphère, et il en résultera des effets différents. Le passage où Poisson prévoit ces effets et indique la voie qui permettra de les découvrir mérite d'être cité.

« Le rapport entre la somme des éléments magnétiques et le volume entier dans chaque corps aimanté, dit Poisson [1], n'est pas la seule donnée relative à ce corps, indépendamment de sa forme ou de ses dimensions, d'où puisse dépendre l'intensité des actions magnétiques; la forme des éléments pourra aussi influer sur cette intensité, et cette influence aura cela de particulier qu'elle ne sera pas la même en des sens différents. Supposons, par exemple, que les éléments magnétiques sont des ellipsoïdes dont les axes ont la même direction dans toute l'étendue d'un même corps et que ce corps est une sphère aimantée par influence dans laquelle la force coercitive est nulle; les attractions ou les répulsions qu'elle exercera au dehors seront différentes dans le sens des axes de ses éléments et dans tout autre sens; en sorte que, si l'on fait tourner cette sphère sur elle-même, son action sur un même point changera en général en grandeur et en direction; mais, si les éléments magnétiques sont des sphères de diamètres égaux ou inégaux, ou bien s'ils s'écartent de la forme sphérique, mais qu'ils soient disposés sans aucune régularité dans l'intérieur d'un corps aimanté par influence, leurs formes n'influeront plus sur les résultats qui dépendront seulement de la somme de leurs volumes, comparée au volume entier de ce corps, et qui seront alors les mêmes en tout sens. Ce dernier cas est celui du fer forgé, et sans doute aussi des autres corps non cristallisés dans lesquels on a observé le magnétisme; mais il serait curieux de chercher si le premier cas n'a pas lieu lorsque les substances sont cristallisées. On pourrait s'en assurer par l'expérience, soit en approchant un cristal d'une aiguille aimantée librement suspendue, soit en faisant osciller de petites aiguilles taillées dans des cristaux en toute sorte de sens et soumises à l'action d'un très fort aimant. »

Le problème de l'induction magnétique d'un corps cristallisé se traitera donc de la même manière, d'après Poisson, que le problème de l'induction magnétique d'un corps amorphe; mais, tandis que, pour ce dernier, on pouvait attribuer la forme sphérique aux éléments magnétiques, pour le premier, on devra laisser quel-

---

(1) Poisson, *Mémoire sur la théorie du magnétisme* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* années 1821 et 1822, t. V).

conques la forme et l'orientation des éléments magnétiques, en supposant seulement que cette forme et cette orientation sont les mêmes pour tous les éléments.

On trouve ainsi, d'après Poisson, que, en un point (x, y, z) d'un corps cristallisé, les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation sont liées aux dérivées partielles de la fonction potentielle magnétique par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -\left(p\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + q\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + r\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right), \\ \mathcal{B} = -\left(p'\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + q'\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + r'\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right), \\ \mathcal{C} = -\left(p''\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + q''\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + r''\,\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right), \end{cases}$$

p, p', p'', q, q', q'', r, r', r'' étant neuf constantes qui, dans l'idée de Poisson, sont essentiellement positives.

Poisson avait d'avance indiqué la voie par laquelle on parviendrait à découvrir les phénomènes d'induction magnétique des cristaux et les principes qui serviraient à expliquer ces expériences. C'est seulement vingt-trois années plus tard que les expérimentateurs découvrirent les phénomènes dont on leur avait signalé l'existence.

En 1847, Plücker [1], ayant placé des cristaux diversement taillés entre les deux pôles d'un électro-aimant puissant, observa les positions que prenaient ces cristaux et crut pouvoir en conclure une action exercée par le magnétisme sur les axes optiques, action différente du magnétisme et du diamagnétisme. Voici la loi expérimentale par laquelle il résumait ses recherches :

« Si l'on place un cristal uniaxe quelconque entre les deux pôles d'un aimant, l'axe est repoussé par chacun des deux pôles. La force qui produit cette répulsion est indépendante de la propriété magnétique ou diamagnétique de la masse du cristal ; elle varie plus lentement avec la distance aux pôles de l'aimant que les forces magnétiques ou diamagnétiques provenant des mêmes pôles et agissant sur le cristal. »

---

[1] J. Plücker, *Ueber die Abstossung der optischen Axen der Krystalle durch die Pole der Magnete* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXII, p. 315 ; 1847).

En 1848, Faraday [1], ayant observé de son côté l'orientation d'une substance cristallisée entre les pôles d'un électro-aimant, indique incidemment que ces phénomènes pourraient s'expliquer « en supposant que le cristal fût un peu plus apte à l'induction magnétique, ou un peu moins apte à l'induction diamagnétique dans la direction de l'axe magnécrystallique que dans toute autre direction ». Cette explication, à laquelle Faraday ne s'arrêta pas alors, était celle de Poisson.

Le travail de Faraday contenait des résultats en désaccord avec ceux de Plücker. Celui-ci, reprenant l'étude des phénomènes qu'il avait découverts, publia deux Mémoires [2] dans lesquels, sans renoncer à sa première interprétation de ces phénomènes, il modifiait légèrement la loi qu'il avait cru démontrer dans son premier Mémoire, en admettant que l'action d'un pôle d'aimant sur un axe optique était répulsive ou attractive selon que le cristal était négatif ou positif.

Ce n'est qu'après tous ces travaux, poursuivis dans une voie inexacte, que Plücker [3] d'une part, Knoblauch et Tyndall [4] d'autre part, arrivèrent à reconnaître la véritable cause des phénomènes observés, et à attribuer ces phénomènes, comme Faraday l'avait indiqué, à une capacité d'aimantation des corps cristallisés variable suivant la direction.

« Tous ces phénomènes que j'ai observés, dit Plücker, s'expliquent en supposant qu'une polarité magnétique ou diamagnétique (selon que la substance est magnétique ou diamagnétique) peut se

---

(1) Faraday, *On the crystalline polarity of bismuth and other bodies, and on its relation to the magnetic form of force* (*Experimental Researches on Electricity,* série XXII, art. 2588; *Philosophical Transactions,* p. 1-41; 1849).

(2) J. Plücker, *Ueber die neue Wirkung des Magnets auf einige Krystalle, die eine vorherrschende Spaltungsfläche besitzen. Einfluss des Magnetismus auf Krystallbildung* (*Poggendorff's Annalen,* t. LXXVI, p. 576; 1849).

J. Plücker, *Ueber die magnetische Beziehung der positiven und negativen optischen Axen der Krystalle* (*Poggendorff's Annalen,* t. LXXVII, p. 447; 1849).

(3) J. Plucker, *Ueber die Fessel'sche Wellenmaschine, den neuen Boutigny'schen Versuch und das Ergebniss fortgesetzter Beobachtungen in betreff des Verhaltens krystallisirter Substanzen gegen den Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie,* t. LXXVIII, p. 421; 1849).

(4) Knoblauch et Tyndall, *Ueber das Verhalten krystallisirten Körper zwischen den Polen eines Magnetes* (*Poggendorff's Annalen,* t. LXXIX, p. 233; 1850).

développer par induction dans les cristaux et s'y développe plus ou moins aisément suivant les diverses directions, fait qui est lié aux variations de l'élasticité de l'éther. »

Knoblauch et Tyndall concluaient ainsi leur Mémoire :

« La loi de Plücker, qui attribue aux axes optiques la manière particulière dont se comportent les cristaux entre les pôles d'un aimant, ne peut être conservée sous sa forme primitive.

» Tous les phénomènes présentés par le spath d'Islande s'expliquent en supposant que les échantillons magnétiques sont plus faiblement magnétiques dans la direction du clivage, et que les échantillons diamagnétiques sont plus faiblement diamagnétiques dans la même direction. »

Les travaux ultérieurs de Faraday, de Plücker et Beer, de Knoblauch et Tyndall, de Hankel, de Matteucci ne cessèrent de confirmer ces conclusions.

La théorie, donnée par Poisson, du magnétisme des cristaux avait été laissée dans l'oubli par les auteurs de ces recherches expérimentales. Sir W. Thomson [1] appela l'attention des physiciens sur cette théorie. Après avoir rappelé les idées de Poisson et transcrit les égalités (1) auxquelles l'illustre géomètre était parvenu, il ajoute :

« Tout le reste de la théorie de Poisson se borne à la considération du cas des substances non cristallisées; dans ce cas, il est démontré que les coefficients p, q', r'' sont égaux entre eux et que les autres sont égaux à zéro. Mais cela n'indique rien sur la possibilité d'établir des relations générales entre les neuf coefficients, quelle que soit la nature de la substance. J'ai trouvé que les relations suivantes, par lesquelles ces neuf coefficients se réduisent à six, devaient être remplies, quelle que soit la nature de la substance

$$(2) \qquad \begin{cases} r' = q'', \\ q'' = r, \\ q' = p. \end{cases}$$

---

[1] Sir W. Thomson, *On the theory of magnetic induction in crystalline and non crystalline substances* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. I, p. 177; 1851. — *Papers on Electrostatics*, art. XXX).

» La démonstration de ces relations est fondée non point sur une proposition incertaine ou sur une hypothèse spéciale, mais sur ce principe qu'une sphère d'une substance quelconque, placée dans un champ magnétique uniforme et capable de tourner autour d'un axe fixe perpendiculaire aux lignes de force, ne peut devenir une source inépuisable d'effet mécanique. »

Cette démonstration a été exposée plus tard par Sir W. Thomson (1).

Cette remarque de Sir W. Thomson achevait de marquer les principes d'une théorie de l'induction magnétique des cristaux et d'en établir les équations fondamentales. Aussi Sir W. Thomson (2) put-il confondre dans une seule et même étude la théorie de l'aimantation par influence des substances amorphes et cristallines.

Auparavant Plücker (3) avait donné des théorèmes intéressants sur les propriétés des cristaux faiblement magnétiques. A. Beer (4) avait intégré les équations différentielles du problème de l'induction magnétique pour une sphère cristalline placée dans un champ uniforme.

Malheureusement, dans le développement de la théorie de l'induction cristalline, il a commis certaines inexactitudes analytiques, comme l'a fait remarquer É. Mathieu.

É. Mathieu (5) est parvenu à des équations d'équilibre analogues à celles que l'on déduit de la théorie de Poisson; mais il y est parvenu par une voie qu'il nous est impossible d'analyser brièvement ici. Remarquons seulement qu'elle est liée à une hypothèse

---

(1) Sir W. Thomson, *Démonstration d'une proposition sur l'induction magnétique des cristaux* (*Papers on electrostatics*, art. XXX, 1872).

(2) Sir W. Thomson, *General problem of magnetic induction* (*Papers on electrostatics*, art. XL, 1872).

(3) J. Plücker, *Ueber die Theorie des Diamagnetismus, die Erklärung des Ueberganges magnetischen Verhaltens in diamagnetisches und mathematische Begründung der bei Krystallen beobachteten Erscheinungen* (*Poggendorff's Annalen*, t. LXXXVI, p. 1; 1852). — *On the magnetic induction of crystals* (*Philosophical Transactions*, 1858, p. 543).

(4) Beer, *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik*, Brunswick, 1865.

(5) É. Mathieu, *Théorie du potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme. 2e Partie : Applications*; Paris, 1886.

sur la manière dont les actions magnétiques s'exercent au sein d'une substance cristallisée et qu'elle conduit à une théorie qui, de l'aveu même de son auteur, ne peut subsister si les aimants qui agissent sur le cristal influencé ne sont pas formés de la même substance que le cristal.

Nous allons voir que les principes posés au Livre IX, Chapitre I, fournissent aisément la mise en équation du problème de l'aimantation par influence d'une substance cristalline.

§ 2. — Surface d'induction magnétique.

Considérons un système que, pour plus de simplicité, nous supposerons n'être pas électrisé. Ce système renferme un aimant permanent que nous désignerons par l'indice 1 et un cristal aimanté que nous désignerons par l'indice 2. Le potentiel thermodynamique interne de ce système aura pour expression [Livre IX, Chap. I, égalité (19)]

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathfrak{J} + \int \mathcal{G}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv_1 \\ + \int \mathcal{G}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv_2, \end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant les composantes de l'aimantation en un point suivant trois directions rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, parallèles aux axes d'élasticité de la substance en ce point ou à trois directions invariablement liées à celles-là.

D'après l'égalité (20) du même Chapitre, chacune des deux fonctions $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ est de la forme suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{C} \\ + \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}^2 \\ + 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}\mathfrak{B}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités λ, μ, ν dépendent seulement des paramètres α, β, ... qui fixent, en chaque point, la nature de la substance; les fonctions φ_{pq} dépendent non seulement de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, mais aussi de ces paramètres α, β, ... Ces fonctions demeurent finies pour

$$\mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = 0, \qquad \mathfrak{C} = 0.$$

Nous aurons souvent à considérer la surface

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\xi^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\eta^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\zeta^2 \\ &+ 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\eta\zeta + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\zeta\xi + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\xi\eta \\ &\qquad + \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 1. \end{aligned} \right.$$

Cette surface du second ordre, qui dépend de la nature et de l'aimantation de la substance au point considéré, est ce que nous nommerons la *surface d'induction magnétique* en ce point. La connaissance de cette surface, pour toute grandeur et toute direction de l'aimantation, est la donnée nécessaire et suffisante pour fixer les propriétés magnétiques d'un milieu.

Lorsque la substance considérée est holomorphe, on a

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0$$

et l'équation (5) représente la surface d'aimantation rapportée à trois axes passant par son centre.

§ 3. — Existence d'un état d'équilibre.

L'aimantation sur le cristal parfaitement doux 2 sera une aimantation d'équilibre si elle fait prendre une valeur minima à la quantité $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité (4). On peut, dans certains cas, prévoir qu'il existe un minimum pour la quantité $\mathfrak{F}$, et, par conséquent, un état d'équilibre stable pour le système; les cas dont il s'agit sont ceux où sont vérifiées les conditions suivantes :

1° La surface d'induction magnétique est, pour toute aimantation du cristal 2, un ellipsoïde réel.

2° La substance qui forme le cristal 2 est holomorphe.

En effet, considérons l'expression du potentiel thermodynamique interne donnée par l'égalité (4). Les variations que l'on peut faire subir à l'aimantation du cristal 2 ne peuvent faire varier les quantités

$$E(\Upsilon - T\Sigma) \quad \text{et} \quad \int \mathcal{G}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv_1.$$

La quantité $\mathfrak{T}$ ne peut jamais être négative, et il en est de même, d'après les hypothèses faites, de la quantité

$$\int \mathcal{G}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv_2.$$

L'ensemble des valeurs que peut prendre la quantité $\mathfrak{F}$ pour toute aimantation possible du corps 2 est donc limité inférieurement. Sans qu'il soit possible d'en conclure en toute rigueur l'existence d'un minimum pour la quantité $\mathfrak{F}$, on peut, du moins, prévoir cette existence, qui correspond à un état d'équilibre *stable* du système.

§ 4. — Équations de l'équilibre magnétique.

Supposons que, à l'intérieur de l'élément dv_2 du cristal 2, les composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de l'aimantation suivant $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ subissent des variations arbitraires $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$. Si l'équilibre est établi sur le système, la variation subie par la quantité $\mathfrak{F}$ sera égale à o.

Les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation suivant Ox, Oy, Oz subissent des variations $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$. Si $\mathcal{V}$ est la fonction potentielle magnétique en un point de l'élément dv, on aura

$$\delta\mathfrak{F} = \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\delta\mathcal{A} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\delta\mathcal{C}\right) dv.$$

Mais on a l'identité

$$\left\|\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\delta\mathcal{A}\right\| = \left\|\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\delta\mathfrak{A}\right\|.$$

On pourra donc écrire

$$\delta\mathfrak{F} = \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\delta\mathfrak{A} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}\delta\mathfrak{B} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\delta\mathfrak{C}\right) dv.$$

Dès lors, on voit sans peine que, en égalant à o la variation subie par la quantité $\mathfrak{F}$ et en exprimant que cette égalité doit avoir lieu quels que soient $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$, on obtiendra les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{A}}\mathcal{G}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots) &= 0,\\
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{B}}\mathcal{G}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots) &= 0,\\
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{C}}\mathcal{G}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots) &= 0.
\end{aligned}$$

Ce sont les équations fondamentales de l'équation magnétique sur une substance non isotrope.

L'égalité (4) permet de transformer ces équations en les sui-

vantes :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} + \lambda + \left(2\varphi_{11} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{A}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{13}}{\partial\mathfrak{A}}\right)\mathfrak{A} \\ \qquad + \left(2\varphi_{12} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{21}}{\partial\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{A}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{A}}\right)\mathfrak{B} \\ \qquad + \left(2\varphi_{13} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{32}}{\partial\mathfrak{A}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{A}}\right)\mathfrak{C} = 0, \\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} + \mu + \left(2\varphi_{21} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{B}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{B}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{13}}{\partial\mathfrak{B}}\right)\mathfrak{A} \\ \qquad + \left(2\varphi_{22} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{21}}{\partial\mathfrak{B}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{B}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{B}}\right)\mathfrak{B} \\ \qquad + \left(2\varphi_{23} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{B}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{32}}{\partial\mathfrak{B}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{B}}\right)\mathfrak{C} = 0, \\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta} + \nu + \left(2\varphi_{31} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{C}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{C}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{13}}{\partial\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{A} \\ \qquad + \left(2\varphi_{32} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{21}}{\partial\mathfrak{C}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{C}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{B} \\ \qquad + \left(2\varphi_{33} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{C}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{32}}{\partial\mathfrak{C}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{C} = 0. \end{cases}$$

Posons

$$(7)\quad \begin{cases} \psi_{1q} = \left(2\varphi_{1q} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{q1}}{\partial\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{q2}}{\partial\mathfrak{A}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{q3}}{\partial\mathfrak{A}}\right), \\ \psi_{2q} = \left(2\varphi_{2q} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{q1}}{\partial\mathfrak{B}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{q2}}{\partial\mathfrak{B}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{q3}}{\partial\mathfrak{B}}\right), \\ \psi_{3q} = \left(2\varphi_{3q} + \mathfrak{A}\dfrac{\partial\varphi_{q1}}{\partial\mathfrak{C}} + \mathfrak{B}\dfrac{\partial\varphi_{q2}}{\partial\mathfrak{C}} + \mathfrak{C}\dfrac{\partial\varphi_{q3}}{\partial\mathfrak{C}}\right), \\ \qquad (q = 1, 2, 3); \end{cases}$$

$$(8)\quad T = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} & \psi_{31} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \psi_{32} \\ \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} \end{vmatrix},$$

$$(9)\quad \begin{cases} \delta_{11} = \psi_{22}\psi_{33} - \psi_{23}\psi_{32}, \\ \delta_{12} = \psi_{23}\psi_{31} - \psi_{21}\psi_{33}, \\ \delta_{13} = \psi_{21}\psi_{32} - \psi_{22}\psi_{31}; \\ \delta_{21} = \psi_{32}\psi_{13} - \psi_{33}\psi_{12}, \\ \delta_{22} = \psi_{33}\psi_{11} - \psi_{31}\psi_{13}, \\ \delta_{23} = \psi_{31}\psi_{12} - \psi_{32}\psi_{11}; \\ \delta_{31} = \psi_{12}\psi_{23} - \psi_{13}\psi_{22}, \\ \delta_{32} = \psi_{13}\psi_{21} - \psi_{11}\psi_{23}, \\ \delta_{33} = \psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21}. \end{cases}$$

Les égalités (6) deviendront

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\frac{1}{T}\left[\delta_{11}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\lambda\right)+\delta_{12}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\mu\right)+\delta_{13}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}+\nu\right)\right], \\ \mathfrak{B} = -\frac{1}{T}\left[\delta_{21}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\lambda\right)+\delta_{22}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\mu\right)+\delta_{23}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}+\nu\right)\right], \\ \mathfrak{C} = -\frac{1}{T}\left[\delta_{31}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\lambda\right)+\delta_{32}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\mu\right)+\delta_{33}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}+\nu\right)\right]. \end{cases}$$

Dans le cas où la substance n'est pas hémimorphe, on a

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0,$$

et les égalités précédentes deviennent

$$(11)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\frac{1}{T}\left(\delta_{11}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\delta_{12}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\delta_{13}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right), \\ \mathfrak{B} = -\frac{1}{T}\left(\delta_{21}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\delta_{22}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\delta_{23}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right), \\ \mathfrak{C} = -\frac{1}{T}\left(\delta_{31}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\delta_{32}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\delta_{33}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right). \end{cases}$$

Supposons que le système ne renferme pas d'aimants permanents. Deux cas seront à distinguer :

1° *Le cristal est holomorphe.* — Dans ce cas, λ, μ, ν étant égaux à 0, il est facile de voir que les équations d'équilibre (6) ou (11) sont vérifiées en posant

$$\mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = 0, \qquad \mathfrak{C} = 0,$$

car, s'il n'y a pas d'aimants permanents, ces hypothèses entraînent

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} = 0.$$

Ainsi *un cristal holomorphe parfaitement doux se désaimante si on le soustrait à l'action de tout aimant permanent.*

2° *Le cristal est hémimorphe.* — Dans ce cas, les quantités λ, μ, ν ne sont plus forcément égales à 0. Si l'une au moins de ces quantités diffère de 0, les équations (6) ne pourront plus être satisfaites si l'on fait

$$\mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = 0, \qquad \mathfrak{C} = 0.$$

Donc, en général, *un cristal hémimorphe demeure aimanté si on le soustrait à l'action de tout aimant permanent.*

Jamais l'expérience n'a constaté jusqu'ici sur les cristaux hémi-

morphes [1], comme la tourmaline, la calamine, etc., ce magnétisme subsistant naturellement, en l'absence de tout aimant permanent, dont la théorie nous fait prévoir la possibilité. Il faut en conclure que, si les quantités λ, μ, ν ne sont pas égales à 0 pour les cristaux hémimorphes connus, elles ont, du moins, de très petites valeurs.

D'après cette remarque, il serait inutile, dans l'étude du magnétisme, de conserver ces coefficients λ, μ, ν; toutefois, nous les laisserons figurer dans nos formules, parce que ces mêmes formules nous serviront de nouveau dans l'étude d'un autre problème où les coefficients λ, μ, ν joueront un rôle important.

Les équations (11) nous montrent que, dans un corps cristallisé holomorphe, la direction de l'aimantation ne coïncide plus, comme dans un corps isotrope, avec la grandeur géométrique dont les composantes sont $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}$.

§ 5. — **Détermination de la distribution qui convient à l'équilibre.**

Supposons que l'expérience ait fait connaître, pour un corps déterminé, de structure homogène ou continûment variable, la surface d'induction magnétique représentée par l'égalité (5).

Les équations (7), (8) et (9) feront alors connaître T et les δ_{pq} en fonction de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et des coordonnées x, y, z du point auquel ces quantités se rapportent. Les quantités λ, μ, ν pourront aussi s'exprimer en fonction de x, y, z. Les relations (10) deviendront des relations entre $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}$, x, y, z. On pourra les supposer résolues en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, et écrire

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \theta_1\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}, x, y, z\right), \\ \mathfrak{B} &= \theta_2\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}, x, y, z\right), \\ \mathfrak{C} &= \theta_3\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}, x, y, z\right). \end{aligned}\right.$$

---

[1] É. Mathieu (*Théorie du potentiel*, t. II, p. 166) a indiqué le premier que les cristaux hémimorphes pouvaient, au point de vue du magnétisme, se distinguer des cristaux holomorphes.

On voit alors que, moyennant ces équations, où les fonctions θ_1, θ_2, θ_3 sont des fonctions dont la forme est déterminée lorsqu'on suppose connue la forme de la surface d'induction magnétique du cristal, la détermination de la distribution qui convient à l'équilibre se ramène à la détermination de la fonction $\mathcal{V}$. Voyons comment cette dernière est déterminée.

Si, dans les expressions de T et des δ_{pq}, nous remplaçons $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ par leurs expressions (12), T et les δ_{pq} deviendront des fonctions de $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}$, x, y, z, et nous pourrons poser, en général,

$$-\frac{\delta_{pq}}{T} = D_{pq}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi},\ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta},\ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta},\ x, y, z\right). \tag{13}$$

Les équations (10) deviendront alors

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{A} &= D_{11}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\lambda\right)+D_{12}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\mu\right)+D_{13}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}+\nu\right),\\ \mathfrak{B} &= D_{21}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\lambda\right)+D_{22}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\mu\right)+D_{23}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}+\nu\right),\\ \mathfrak{C} &= D_{31}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\lambda\right)+D_{32}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\mu\right)+D_{33}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}+\nu\right).\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Nous allons imposer à ces équations une dernière transformation. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont les composantes de l'aimantation suivant trois axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, parallèles aux axes d'élasticité du cristal au point (x, y, z). Soient, en ce point,

a, a', a'' les cosinus des angles de Ox avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$;
b, b', b'' les cosinus des angles de Oy avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$;
c, c', c'' les cosinus des angles de Oz avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Ces neuf cosinus sont des fonctions de x, y, z, déterminées lorsqu'on connaît la nature et l'orientation de la substance en chaque point.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes suivant Ox, Oy, Oz de l'aimantation au point (x, y, z). Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{A} &= a\,\mathcal{A}+b\,\mathcal{B}+c\,\mathcal{C},\\ \mathfrak{B} &= a'\mathcal{A}+b'\mathcal{B}+c'\mathcal{C},\\ \mathfrak{C} &= a''\mathcal{A}+b''\mathcal{B}+c''\mathcal{C}.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Nous aurons, d'autre part,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} &= a\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + b\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + c\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\\
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} &= a'\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + b'\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + c'\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\\
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta} &= a''\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + b''\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + c''\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

Ces égalités (16) permettent de transformer la quantité

$$\mathrm{D}_{pq}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi},\ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta},\ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta},\ x, y, z\right)$$

en une fonction de $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}, x, y, z$,

$$d_{pq}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x},\ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y},\ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\ x, y, z\right).$$

Les égalités (14), (15), (16) donnent alors

$$\begin{aligned}
a\,\mathcal{A} + b\,\mathcal{B} + c\,\mathcal{C} = {} & (a\,d_{11} + a'\,d_{12} + a''\,d_{13})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right)\\
& + (b\,d_{11} + b'\,d_{12} + b''\,d_{13})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right)\\
& + (c\,d_{11} + c'\,d_{12} + c''\,d_{13})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right),\\
a'\,\mathcal{A} + b'\,\mathcal{B} + c'\,\mathcal{C} = {} & (a\,d_{21} + a'\,d_{22} + a''\,d_{23})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right)\\
& + (b\,d_{21} + b'\,d_{22} + b''\,d_{23})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right)\\
& + (c\,d_{21} + c'\,d_{22} + c''\,d_{23})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right),\\
a''\,\mathcal{A} + b''\,\mathcal{B} + c''\,\mathcal{C} = {} & (a\,d_{31} + a'\,d_{32} + a''\,d_{33})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right)\\
& + (b\,d_{31} + b'\,d_{32} + b''\,d_{33})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right)\\
& + (c\,d_{31} + c'\,d_{32} + c''\,d_{33})\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right);
\end{aligned}$$

ou bien, en désignant par $\mathcal{D}_{pq}$ des fonctions de $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}, x, y, z$,

faciles à former en fonction des d_{pq},

$$(17)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{D}_{11}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right) + \mathcal{D}_{12}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right) + \mathcal{D}_{13}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right), \\ \mathcal{B} = \mathcal{D}_{21}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right) + \mathcal{D}_{22}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right) + \mathcal{D}_{23}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right), \\ \mathcal{C} = \mathcal{D}_{31}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right) + \mathcal{D}_{32}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right) + \mathcal{D}_{33}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right). \end{cases}$$

Il devient maintenant facile de former l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction $\mathcal{V}$ en toutes les régions de l'espace.

A l'intérieur des aimants permanents 1, on a

$$(18)\qquad \Delta\mathcal{V} = 4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right),$$

et le second membre est une fonction censée connue de x, y, z.

Dans l'espace compris entre les aimants permanents et le corps cristallisé, on a

$$(19)\qquad \Delta\mathcal{V} = 0.$$

Pour obtenir l'équation aux dérivées partielles que $\mathcal{V}$ vérifie en tous les points du corps 2, différentions la première des égalités (17) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus.

Le second membre de l'égalité à laquelle nous parviendrons sera une fonction de x, y, z et des dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction $\mathcal{V}$. Le premier membre

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}$$

pourra être remplacé par

$$\frac{\Delta\mathcal{V}}{4\pi}.$$

Nous obtiendrons donc une équation aux dérivées partielles du second ordre que la fonction $\mathcal{V}$ devra vérifier en tout point du cristal.

Pour achever de déterminer la fonction $\mathcal{V}$, il faudra imposer à cette fonction des conditions aux limites. A l'infini, ou bien sur la surface de séparation des aimants permanents et du milieu non

magnétique, ces conditions seront les mêmes que si le corps parfaitement doux était isotrope. A la surface de séparation du corps parfaitement doux et du milieu non magnétique, on aura

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = 4\pi [\mathcal{A} \cos(N_i, x) + \mathcal{B} \cos(N_i, y) + \mathcal{C} \cos(N_i, z)],$$

ou bien, en vertu des égalités (17),

$$(20) \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}\right) - [\mathcal{D}_{11} \cos(N_i, x) + \mathcal{D}_{21} \cos(N_i, y) + \mathcal{D}_{31} \cos(N_i, z)] \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right) \\ \quad - [\mathcal{D}_{12} \cos(N_i, x) + \mathcal{D}_{22} \cos(N_i, y) + \mathcal{D}_{32} \cos(N_i, z)] \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right) \\ \quad - [\mathcal{D}_{13} \cos(N_i, x) + \mathcal{D}_{23} \cos(N_i, y) + \mathcal{D}_{33} \cos(N_i, z)] \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right) = 0. \end{cases}$$

Ainsi est défini le problème que l'on aurait en général à intégrer pour déterminer $\mathcal{V}$ et, partant, d'après les égalités (12), la distribution qui convient à l'équilibre.

§ 6. — Remarque sur les corps hémimorphes homogènes.

Dans ce qui précède, nous n'avons rien supposé sur l'homogénéité ou l'hétérogénéité du corps étudié. Dans le cas où la substance qui forme ce corps a, en tout point, la même constitution et la même orientation, on peut joindre à ce qui précède une remarque importante.

Les axes d'élasticité $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ ayant la même orientation en tout point (x, y, z), on peut supposer qu'on ait pris les axes Ox, Oy, Oz parallèles aux axes d'élasticité. Les égalités (10) pourront alors s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{1}{T}\left[\delta_{11}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right) + \delta_{12}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right) + \delta_{13}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right)\right], \\ \mathcal{B} &= -\frac{1}{T}\left[\delta_{21}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right) + \delta_{22}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right) + \delta_{23}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right)\right], \\ \mathcal{C} &= -\frac{1}{T}\left[\delta_{31}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \lambda\right) + \delta_{32}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mu\right) + \delta_{33}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \nu\right)\right]. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si le corps est homogène, λ, μ, ν sont indépendants de x, y, z. On voit alors sans peine qu'*un corps hémimorphe homogène s'aimante dans un champ donné comme s'il était*

holomorphe et qu'on eût superposé au champ donné un champ uniforme dont la fonction potentielle magnétique serait

$$\lambda x + \mu y + \nu z.$$

Cette proposition ramène, dans le cas où l'on étudie des cristaux homogènes, l'étude générale des cristaux hémimorphes à l'étude plus particulière des cristaux holomorphes.



CHAPITRE II.

LA THÉORIE DE POISSON.

§ 1. — Les deux surfaces d'induction magnétique.

Nous avons vu que l'étude de l'aimantation par influence d'une masse cristalline supposait la connaissance de la surface d'induction magnétique définie par l'égalité

$$\begin{aligned}&\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta\\&\quad+\varphi_{11}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})\xi^2+\varphi_{22}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})\eta^2+\varphi_{33}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})\zeta^2\\&\quad+2\varphi_{23}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})\eta\zeta+2\varphi_{31}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})\zeta\xi+2\varphi_{12}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})\xi\eta=1.\end{aligned}$$

Cette surface est rapportée à trois axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, dont les directions indiquent l'orientation de la substance au point (x, y, z); ce sont, par exemple, les axes d'élasticité au point (x, y, z), ou trois directions rectangulaires invariablement liées aux axes d'élasticité.

L'*approximation de Poisson* consiste à supposer que les quantités φ_{pq} sont, non pas des fonctions de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, mais de simples constantes. La surface d'induction magnétique en un point ne dépend plus de l'aimantation en ce point, mais seulement de la nature en ce point de la substance dont le cristal est formé.

Supposons que le cristal ait en chaque point la même constitution; la surface d'aimantation sera, pour chaque point, la même surface du second ordre.

Nous avons supposé jusqu'ici cette surface rapportée pour chaque point (x, y, z) à trois directions rectangulaires quelconques $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ invariablement liées aux axes d'élasticité au point (x, y, z).

Mais on peut choisir ces droites de telle manière que les termes en $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ disparaissent de l'équation de la surface d'induction magnétique. Les trois droites rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, qu'il faut choisir pour cela, sont ce que nous nommerons les *axes d'induction magnétique* au point (x, y, z).

L'équation de la surface d'induction magnétique rapportée aux axes d'induction magnétique sera de la forme

$$\frac{\xi^2}{2\varpi_1} + \frac{\eta^2}{2\varpi_2} + \frac{\zeta^2}{2\varpi_3} + \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 1. \tag{1}$$

Si le cristal a non seulement la même constitution en chaque point, mais si, de plus, il ne présente ni macle, ni groupement par pénétration, les axes d'induction magnétique seront, en chaque point, orientés de la même manière par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. *Dans toute question où la position du cristal dans l'espace ne variera pas,* on pourra supposer que l'on ait pris pour axes fixes Ox, Oy, Oz les axes d'induction magnétique du cristal.

Proposons-nous, par exemple, d'étudier l'aimantation du cristal en prenant pour axes de coordonnées les axes d'induction magnétique $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Soient $\mathcal{V}_1$ la fonction potentielle magnétique des aimants permanents 1 et $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle de l'aimantation répartie sur le cristal 2. La partie variable du potentiel thermodynamique interne aura pour valeur

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi_2} \right\| dv_2 + \frac{1}{2}\int \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi_2} \right\| dv_2 \\ &\quad + \int \left(\frac{\mathfrak{A}_2^2}{2\varpi_1} + \frac{\mathfrak{B}_2^2}{2\varpi_2} + \frac{\mathfrak{C}_2^2}{2\varpi_3} + \lambda\mathfrak{A}_2 + \mu\mathfrak{B}_2 + \nu\mathfrak{C}_2 \right) dv_2. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

En égalant à o la variation que cette quantité $\mathcal{F}$ éprouve par suite d'un changement quelconque dans l'aimantation, on trouve les égalités

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -\varpi_1\left(\lambda + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi}\right), \\ \mathfrak{B} &= -\varpi_2\left(\mu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \eta}\right), \\ \mathfrak{C} &= -\varpi_3\left(\nu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \zeta}\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ces relations nous montrent comment doit être dirigée la grandeur géométrique qui a pour composantes

$$-\left(\lambda + \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \xi}\right) = \alpha,$$

$$-\left(\mu + \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \eta}\right) = \beta,$$

$$-\left(\nu + \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \zeta}\right) = \gamma,$$

pour que l'aimantation ait une direction donnée. La règle qui fixe la direction de la grandeur α, β, γ est la suivante :

Par le centre Ω (*fig.* 22) de la surface d'induction magnétique on mène une droite $\Omega\mathfrak{M}$ ayant des cosinus directeurs propor-

Fig. 22.

tionnels à $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Par le point Ω on mène un plan P conjugué, dans la surface d'induction magnétique, à la direction $\Omega\mathfrak{M}$. Enfin à ce plan P et du même côté que la droite $\Omega\mathfrak{M}$, on mène une normale ΩF. Les cosinus directeurs de cette droite ΩF sont proportionnels à α, β, γ.

Lorsqu'on se donne la direction de la grandeur géométrique qui a pour composantes α, β, γ et que l'on veut obtenir la direction de l'aimantation, on peut répéter une construction en tout semblable à la précédente en faisant usage non plus de la surface d'induction magnétique, mais de la *surface inverse d'induction magnétique,* qui a pour équation

$$(4) \qquad \varpi_1 \xi^2 + \varpi_2 \eta^2 + \varpi_3 \zeta^2 = 1.$$

De l'une comme de l'autre de ces constructions, on déduit la conclusion suivante :

Pour que la grandeur géométrique dont les composantes sont α, β, γ *coïncide en direction avec l'aimantation, il faut et il suffit que ces deux grandeurs géométriques soient dirigées suivant l'un des axes d'aimantation du cristal.*

Les trois quantités ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, qui sont liées par des relations très simples aux longueurs des axes des surfaces directe et inverse d'induction magnétique portent le nom de *coefficients principaux d'aimantation* du cristal.

§ 2. — La détermination de l'aimantation ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles.

La fonction potentielle magnétique $\mathfrak{V}_1$ des aimants permanents est censée donnée. Dès lors, d'après les égalités (3), la détermination des composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de l'aimantation se ramène à la détermination de la fonction $\mathfrak{V}_2$.

Différentions la première des égalités (3) par rapport à ξ, la seconde par rapport à η, la troisième par rapport à ζ, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en observant que

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \zeta^2} = 4\pi\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial \zeta}\right)$$

et que, en tout point du cristal,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_1}{\partial \zeta^2} = 0;$$

nous aurons

$$(4)\qquad \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_1\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_2\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_3\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles que la fonction $\mathfrak{V}_2$ doit vérifier en tout point du cristal, tandis qu'en tout point extérieur au cristal, elle vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial \zeta^2} = 0.$$

La fonction $\mathfrak{V}_2$ est égale à 0 à l'infini comme une fonction potentielle ordinaire; elle est continue dans tout l'espace, même à

la traversée de la surface qui sépare le cristal du milieu qui l'environne. Il n'en est pas de même de ses dérivées partielles du premier ordre. On a, en effet, à cette surface,

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_e} = 4\pi \,\|\, \mathfrak{A} \cos(N_i, \xi) \,\|,$$

équation qui devient, moyennant les égalités (3),

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_1\right)\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi}\right)_i \cos(N_i, \xi) + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_2\right)\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \eta}\right)_i \cos(N_i, \eta) \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_3\right)\left(\frac{\partial \mathcal{V}_3}{\partial \zeta}\right)_i \cos(N_i, \zeta) \\ &+ \varpi_1\left(\lambda + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi}\right)\cos(N_i, \xi) + \varpi_2\left(\mu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \eta}\right)\cos(N_i, \eta) \\ &\qquad\qquad + \varpi_3\left(\nu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \zeta}\right)\cos(N_i, \zeta) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_e} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces diverses conditions ne peuvent laisser d'indétermination dans l'expression de la quantité $\mathcal{V}_2$. Supposons, en effet, qu'on puisse les remplir au moyen de deux expressions distinctes de $\mathcal{V}_2$ et soit Θ la différence de ces deux fonctions $\mathcal{V}_2$. La fonction Θ, on le voit aisément, vérifiera une équation analogue à l'équation (4) en tout point intérieur au cristal et, à l'extérieur, elle sera harmonique. Si du désigne un élément de l'espace illimité extérieur au cristal, on devra avoir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\int \Theta\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2}\right) du \\ &\quad + \int \left[\left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_1\right)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_2\right)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_3\right)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2}\right] \Theta \, dv_2 = 0. \end{aligned}$$

Si dS désigne un élément de la surface qui limite le cristal, une intégration par parties transformera cette égalité en

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\int \Pi\Theta\, du + \int \left[\left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_1\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_2\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_3\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}\right)^2\right] dv_2 \\ &\quad + \mathrm{S}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Theta}{\partial N_e} + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_1\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right)_i \cos(N_i, \xi) + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_2\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right)_i \cos(N_i, \eta) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left(\frac{1}{4\pi} + \varpi_3\right)_i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}\right)_i \cos(N_i, \zeta)\right] \Theta \, dS = 0. \end{aligned}$$

Mais, les deux expressions de la fonction $\mathcal{V}_2$ vérifiant l'égalité (6)

en tout point de la surface S, on aura, en tout point de la surface S,

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Theta}{\partial N_e}+\left(\frac{1}{4\pi}+\varpi_1\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)_i\cos(N_i,\xi)+\left(\frac{1}{4\pi}+\varpi_2\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right)_i\cos(N_i,\eta)$$
$$+\left(\frac{1}{4\pi}+\varpi_3\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}\right)_i\cos(N_i,\zeta)=0.$$

L'égalité précédente se réduira donc à

$$\frac{1}{4\pi}\int\Pi\Theta\,du+\int\left[\left(\frac{1}{4\pi}+\varpi_1\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{1}{4\pi}+\varpi_2\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{1}{4\pi}+\varpi_3\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}\right)^2\right]dv_2=0.$$

Nous verrons tout à l'heure qu'il n'y a lieu d'étudier que les cristaux pour lesquels les trois quantités ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sont positives. L'égalité précédente ne peut alors avoir lieu si l'on n'a, en tout point de l'espace,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}=0,\qquad\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}=0,\qquad\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}=0.$$

Si l'on ajoute que la fonction Θ est continue dans tout l'espace et égale à o à l'infini, on voit que l'on doit avoir, dans tout l'espace,

$$\Theta=0,$$

en sorte que les deux expressions de la fonction $\mathcal{V}_2$ sont identiques.

Ainsi, *lorsque les trois coefficients principaux d'aimantation sont positifs, il ne peut exister plus d'une solution au problème de l'aimantation par influence.* D'ailleurs, ce qui a été dit aux §§ 3 et 6 du Chapitre précédent nous fait prévoir que, dans ce cas, ce problème admet toujours une solution.

§ 3. — Stabilité de l'équilibre magnétique.

La distribution magnétique déterminée par les égalités précédentes correspond-elle à un état d'équilibre stable?

Considérons un élément de volume dv_2 appartenant au cristal, et donnons deux fois de suite aux composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de l'aimantation dans cet élément des variations arbitraires $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$.

Les premières variations font croître $\mathfrak{F}$ d'une quantité

$$\delta\mathfrak{F}=\left\|\left(\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial\xi}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial\xi}+\lambda+\frac{\mathfrak{A}}{\varpi_1}\right)\delta\mathfrak{A}\right\|.$$

Les secondes variations font varier $\delta\mathcal{F}$ de

$$\delta^2\mathcal{F} = \frac{(\delta\mathfrak{A})^2}{\varpi_1} + \frac{(\delta\mathfrak{B})^2}{\varpi_2} + \frac{(\delta\mathfrak{C})^2}{\varpi_3}.$$

Si les trois quantités ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 ne sont pas toutes trois positives, il sera toujours possible de choisir les quantités $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$, de manière que la quantité $\delta^2\mathcal{F}$ soit négative. Ainsi *l'équilibre magnétique ne peut être stable sur un cristal que si les trois coefficients principaux d'aimantation sont positifs.*

Réciproquement, *si les trois coefficients principaux d'aimantation d'un cristal sont positifs, l'équilibre magnétique est assurément stable sur ce cristal.*

Donnons deux fois de suite à l'aimantation en chaque point du cristal des variations arbitraires $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$. Posons

$$\delta\mathfrak{A} = a\,dt, \qquad \delta\mathfrak{B} = b\,dt. \qquad \delta\mathfrak{C} = c\,dt,$$

dt étant une constante infiniment petite et a, b, c des fonctions uniformes finies et continues de ξ, η, ζ.

Supposons qu'aux divers points du cristal on distribue une aimantation ayant pour composantes les quantités a, b, c. Soit Ω la fonction potentielle magnétique de cette aimantation. En reproduisant les calculs faits au Livre IX, Chapitre III, § 2, nous trouvons sans peine que l'on a

$$\delta_2\mathcal{F} = \frac{dt^2}{8\pi}\int \Pi\Omega\,du + dt^2\int\left(\frac{\Pi\Omega}{8\pi} + \frac{a^2}{\varpi_1} + \frac{b^2}{\varpi_2} + \frac{c^2}{\varpi_3}\right)dv_2.$$

Si, comme nous l'avons supposé, les trois quantités ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sont positives, cette quantité $\delta^2\mathcal{F}$ est essentiellement positive, et l'équilibre magnétique est stable.

Ainsi, pour qu'on puisse déterminer sur un cristal, placé dans des conditions données, une distribution magnétique correspondant à un équilibre stable, il faut et il suffit que les surfaces d'induction magnétique soient des *ellipsoïdes réels*. Le cristal ne peut être diamagnétique dans aucune direction.



CHAPITRE III.

ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME SUR UN CORPS CRISTALLISÉ.

§ 1. — Aimantation d'une sphère ou d'un ellipsoïde cristallins dans un champ magnétique uniforme.

A. Beer (¹) a montré que l'on pouvait aisément étendre la méthode par laquelle Poisson a étudié l'aimantation d'une sphère isotrope placée dans un champ magnétique uniforme au cas où la sphère est taillée dans une substance cristalline homogène.

Pour résoudre ce problème, nous pouvons prendre les axes de coordonnées parallèles aux axes principaux d'aimantation de la substance et menés par le centre de la sphère. Les équations de l'équilibre magnétique seront alors [Chap. II, égalités (3)],

$$\mathfrak{A} = -\varpi_1\left(\lambda + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi}\right),$$

$$\mathfrak{B} = -\varpi_2\left(\mu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \eta}\right),$$

$$\mathfrak{C} = -\varpi_3\left(\nu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \zeta}\right).$$

Supposons que le champ, uniforme, corresponde à une fonction potentielle magnétique

$$\mathcal{V}_1 = -(F\xi + G\eta + H\zeta + K),$$

(¹) A. Beer, *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre von Magnetismus und die Elektrodynamik*. Brunswick, 1863.

F, G, H, K étant quatre constantes. Les égalités précédentes deviendront

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -\varpi_1\left(\lambda - F + \frac{\partial \mho_2}{\partial \xi}\right),\\ \mathfrak{B} &= -\varpi_2\left(\mu - G + \frac{\partial \mho_2}{\partial \eta}\right),\\ \mathfrak{C} &= -\varpi_3\left(\nu - H + \frac{\partial \mho_2}{\partial \zeta}\right). \end{aligned}\right.$$

Ces égalités déterminent sans ambiguïté $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; or il est facile de voir qu'elles seront vérifiées par une distribution magnétique uniforme répandue à l'intérieur de la sphère, et ayant en chaque point pour composantes, suivant les trois axes principaux d'aimantation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{\varpi_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_1}(F-\lambda),\\ \mathfrak{B} &= \frac{\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2}(G-\mu),\\ \mathfrak{C} &= \frac{\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3}(H-\nu). \end{aligned}\right.$$

Dans ce cas, en effet, on aura [Livre VIII, Chap. II, égalité (5)]

$$\mho_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{4}{3}\pi(\mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C}\zeta),$$

en tout point (ξ, η, ζ) intérieur à la sphère cristalline.

Une méthode analogue s'appliquera à l'étude de l'aimantation prise, dans un champ magnétique uniforme, par un ellipsoïde taillé dans un cristal homogène.

Prenons pour axes de coordonnées les axes principaux de l'ellipsoïde, Ox, Oy, Oz, lesquels ne coïncident pas forcément avec les axes principaux d'aimantation $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ de la substance cristallisée. Les neuf cosinus des angles que font les droites du premier trièdre avec les droites du second seront dénotés conformément au Tableau suivant :

	$O\xi$	$O\eta$	$O\zeta$
Ox	a	a'	a''
Oy	b	b'	b''
Oz	c	c'	c''

Dès lors, si nous désignons par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation suivant Ox, Oy, Oz, nous aurons

$$\mathcal{A} = \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}a' + \mathfrak{C}a'',$$
$$\mathcal{B} = \mathfrak{A}b + \mathfrak{B}b' + \mathfrak{C}b'',$$
$$\mathcal{C} = \mathfrak{A}c + \mathfrak{B}c' + \mathfrak{C}c'',$$

ou bien, en vertu des relations (1),

$$(3)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -[\varpi_1(\lambda - F)a + \varpi_2(\mu - G)a' + \varpi_3(\nu - H)a''] \\ \qquad - \left(\varpi_1 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} a + \varpi_2 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \eta} a' + \varpi_3 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \zeta} a''\right), \\ \mathcal{B} = -[\varpi_1(\lambda - F)b + \varpi_2(\mu - G)b' + \varpi_3(\nu - H)b''] \\ \qquad - \left(\varpi_1 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} b + \varpi_2 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \eta} b' + \varpi_3 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \zeta} b''\right), \\ \mathcal{C} = -[\varpi_1(\lambda - F)c + \varpi_2(\mu - G)c' + \varpi_3(\nu - H)c''] \\ \qquad - \left(\varpi_1 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} c + \varpi_2 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \eta} c' + \varpi_3 \dfrac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \zeta} c''\right). \end{cases}$$

Cherchons s'il est possible de satisfaire à ces équations en remplissant l'ellipsoïde par une distribution magnétique uniforme. Si l'ellipsoïde est uniformément aimanté, on aura [Livre VIII, Chap. II, égalité (10)],

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} = 2\mathcal{A}l, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} = 2\mathcal{B}m, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} = 2\mathcal{C}n,$$

en désignant par l, m, n des constantes que nous avions désignées par λ, μ, ν au Livre VIII, Chapitre II.

Ces dernières égalités donnent

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} = 2(\mathcal{A} la + \mathcal{B} mb + \mathcal{C} nc),$$
$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \eta} = 2(\mathcal{A} la' + \mathcal{B} mb' + \mathcal{C} nc'),$$
$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \zeta} = 2(\mathcal{A} la'' + \mathcal{B} mb'' + \mathcal{C} nc'').$$

Il suffira donc de déterminer $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ par les trois équations linéaires suivantes

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&[1 + 2l\,(\varpi_1 a^2 + \varpi_2 a'^2 + \varpi_3 a''^2)]\,\mathcal{A}\\
&\quad + 2m(\varpi_1 ab + \varpi_2 a'b' + \varpi_3 a''b'')\,\mathcal{B}\\
&\quad + 2n\,(\varpi_1 ac + \varpi_2 a'c' + \varpi_3 a''c'')\,\mathcal{C}\\
&= \varpi_1 a(\mathrm{F} - \lambda) + \varpi_2 a'(\mathrm{G} - \mu) + \varpi_3 a''(\mathrm{H} - \nu),\\
&2l\,(\varpi_1 ba + \varpi_2 b'a' + \varpi_3 b''a'')\,\mathcal{A}\\
&\quad + [1 + 2m(\varpi_1 b^2 + \varpi_2 b'^2 + \varpi_3 b''^2)]\,\mathcal{B}\\
&\quad + 2n\,(\varpi_1 bc + \varpi_1 b'c' + \varpi_3 b''c'')\,\mathcal{C}\\
&= \varpi_1 b(\mathrm{F} - \lambda) + \varpi_2 b'(\mathrm{G} - \mu) + \varpi_3 b''(\mathrm{H} - \nu),\\
&2l\,(\varpi_1 ca + \varpi_2 c'a' + \varpi_3 c''a'')\,\mathcal{A}\\
&\quad + 2m(\varpi_1 cb + \varpi_2 c'b' + \varpi_3 c''b'')\,\mathcal{B}\\
&\quad + [1 + 2n\,(\varpi_1 c^2 + \varpi_2 c'^2 + \varpi_3 c''^2)]\,\mathcal{C}\\
&= \varpi_1 c(\mathrm{F} - \lambda) + \varpi_2 c'(\mathrm{G} - \mu) + \varpi_3 c''(\mathrm{H} - \nu).
\end{aligned}\right.$$

Ainsi, un ellipsoïde taillé dans une substance cristalline et placé dans un champ magnétique uniforme s'aimante uniformément.

§ 2. — Forces qui sollicitent une sphère cristalline dans un champ magnétique uniforme.

Un corps cristallisé homogène étant placé dans un champ magnétique quelconque, le potentiel thermodynamique interne du système, réduit à ceux de ses termes qui sont susceptibles de varier, est donné par l'égalité (2) du Chapitre précédent; cette égalité peut encore s'écrire

$$\mathfrak{F} = \int \left\| \mathfrak{A}_2 \left(\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi_2} + \lambda + \frac{\mathfrak{A}_2}{\varpi_1} \right) \right\| dv_2 - \frac{1}{2} \int \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi_2} + \frac{\mathfrak{A}_2^2}{\varpi_1} \right\| dv_2.$$

Mais, d'après les conditions de l'équilibre magnétique, on a, à

chaque instant,

$$\mathfrak{A}_2 = -\varpi_1\left(\lambda + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi_2}\right),$$

$$\mathfrak{B}_2 = -\varpi_2\left(\mu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \eta_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \eta_2}\right),$$

$$\mathfrak{C}_2 = -\varpi_3\left(\nu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \zeta_2}\right).$$

L'égalité précédente se réduit donc à

$$(5) \qquad \mathfrak{F} = -\frac{1}{2}\int \left\| \mathfrak{A}\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \xi} + \frac{\mathfrak{A}^2}{\varpi_1} \right\| dv_2.$$

Cette égalité est vraie, quelles que soient les particularités présentées par le champ magnétique et quelle que soit la forme du corps cristallisé.

Supposons, en particulier, que le champ soit uniforme et que le corps soit sphérique. La sphère s'aimantera uniformément et, en tout point (ξ, η, ζ) intérieur à la sphère, nous aurons

$$\mathcal{V}_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{4}{3}\pi(\mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C}\zeta).$$

L'égalité (5) deviendra donc, en désignant par R le rayon de la sphère,

$$\mathfrak{F} = -\frac{2}{3}\pi \left\| \frac{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_1}{\varpi_1}\mathfrak{A}^2 \right\| R^3,$$

ou, en remplaçant $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ par leurs valeurs (2),

$$(6) \quad \mathfrak{F} = -\frac{R^3}{2}\left[\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_1}(F - \lambda)^2 + \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_2}(G - \mu)^2 + \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_3}(H - \nu)^2\right].$$

Si l'orientation de la sphère varie dans l'espace, les composantes F, G, H de l'action du champ suivant les axes principaux d'induction magnétique du cristal subiront des variations, et la quantité $\mathfrak{F}$, donnée par l'égalité précédente, subira une variation $\delta\mathfrak{F}$. La quantité $(-\delta\mathfrak{F})$ sera le travail effectué par les forces magnétiques auxquelles la sphère est soumise.

Une translation virtuelle, non accompagnée de rotation, ne fait pas varier la quantité $\mathfrak{F}$. Les actions magnétiques que subit une

sphère cristalline quelconque dans un champ magnétique uniforme sont donc réductibles à un couple.

L'expression (6) est susceptible d'une interprétation géométrique.

Considérons l'ellipsoïde (E′) représenté par l'équation

$$(7)\qquad \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_1}\xi^2+\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2}\eta^2+\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3}\zeta^2=1.$$

Cet ellipsoïde a mêmes directions d'axes que l'ellipsoïde d'induction magnétique.

Si, par le centre O, on mène la grandeur géométrique dont les composantes sont

$$F-\lambda,\quad G-\mu,\quad H-\nu,$$

sa direction rencontrera cet ellipsoïde en un point M′. Soit ρ' la distance OM′. Soit P′ le plan tangent en M′ à l'ellipsoïde E′. Soit Δ' la distance du centre O à ce plan P′. On aura

$$\frac{1}{\Delta'^2}=\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_1}x'^2+\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2}y'^2+\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3}z'^2,$$

et l'égalité (6) pourra s'écrire

$$(8)\qquad \mathfrak{F}=-\frac{R^3}{2}\frac{L^2}{\rho'^2\Delta'^2},$$

en désignant par L la grandeur géométrique ayant pour composantes

$$F-\lambda,\quad G-\mu,\quad H-\nu.$$

Cette formule (8) peut encore prendre une autre forme. Considérons l'ellipsoïde E donné par l'équation

$$(9)\qquad \frac{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}\xi^2+\frac{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}\eta^2+\frac{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}\zeta^2=1.$$

Cet ellipsoïde a encore mêmes directions d'axes que l'ellipsoïde d'induction magnétique.

La droite OM′ rencontre cet ellipsoïde en un point M ; soit ρ la distance OM ; on démontre sans peine que

$$\rho = \frac{1}{\Delta}.$$

L'égalité (8) peut donc s'écrire

$$\mathcal{F} = -\frac{R^3}{2} L^2 \frac{\rho^2}{\rho'^2}. \qquad (10)$$

Cette formule conduit immédiatement à un certain nombre de conséquences dans le cas où l'on a

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

Ce cas, on le sait, est présenté par toutes les substances holomorphes et aussi, du moins approximativement, par les substances hémimorphes. Dans ce cas, la quantité L n'est autre que l'intensité même du champ ; elle est donc indépendante de l'orientation de la sphère ; la quantité $\frac{\rho}{\rho'}$ varie seule avec cette orientation.

Si la sphère cristalline est soumise aux seules actions magnétiques, la quantité $\mathcal{F}$ devra, pour l'équilibre, prendre la plus petite valeur qui soit compatible avec les liaisons auxquelles la sphère est assujettie ; la quantité $\frac{\rho}{\rho'}$ devra donc avoir la plus grande valeur possible.

Supposons que l'on ait

$$\varpi_1 > \varpi_2 > \varpi_3.$$

Si la sphère est libre de s'orienter de toute manière, ρ^2 prendra sa plus grande valeur $\dfrac{\frac{4}{3}\varpi_1}{1 + \frac{4}{3}\varpi_1}$ et ρ'^2 sa plus petite valeur $\dfrac{1 + \frac{4}{3}\varpi_1}{\frac{4}{3}\varpi_1}$ lorsque ces deux directions coïncideront avec la direction de l'axe principal d'induction magnétique qui correspond au coefficient d'aimantation ϖ_1.

Ainsi, *si une sphère cristalline holomorphe libre de s'orienter est soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme, elle s'orientera de manière que l'axe de plus grande aimantation de la substance soit parallèle aux lignes de force du champ.*

On démontrerait de même la proposition suivante :

Supposons la sphère cristalline susceptible seulement de tourner autour d'un axe parallèle à l'un des axes principaux d'aimantation et les lignes de force du champ perpendiculaires à cet axe. La sphère cristalline s'orientera de telle sorte que celui des deux autres axes d'aimantation qui correspond au plus grand coefficient d'aimantation prenne la direction des lignes de force au champ.

Il peut arriver que l'ellipsoïde d'induction magnétique soit un ellipsoïde de révolution; dans ce cas, le cristal sera *uniaxe* au point de vue du magnétisme. En général, les raisons de symétrie qui obligent un cristal à être optiquement uniaxe obligeront aussi ce cristal à être magnétiquement uniaxe. Les cristaux optiquement uniaxes et les cristaux magnétiquement uniaxes seront donc, en général, les mêmes. Toutefois, dans certains cas particuliers, il pourra arriver que l'ellipsoïde d'induction magnétique ou l'ellipsoïde d'élasticité envisagé en Optique aient une symétrie supérieure à celle de la structure cristalline: l'un pourra être de révolution, tandis que l'autre ne le serait pas; le cristal pourra être magnétiquement uniaxe et optiquement biaxe ou inversement. C'est ce qui arrive pour le sulfate de fer qui est magnétiquement uniaxe, quoique clinorhombique et optiquement biaxe ([1]).

Si un cristal uniaxe ne peut que tourner autour d'une droite parallèle à l'axe magnétique et si les lignes de force du champ sont perpendiculaires à cette droite, aucun couple ne tendra, d'après ce qui précède, à donner à ce cristal une orientation plutôt qu'une autre. L'équilibre du cristal sera indifférent.

Supposons, au contraire, que le cristal puisse seulement tourner autour d'une droite parallèle à l'équateur de l'ellipsoïde d'induction magnétique, les lignes de force du champ étant perpendiculaires à cette droite. Si l'ellipsoïde d'induction magnétique est un ellipsoïde de révolution allongé, cas auquel le cristal est *magnétiquement positif,* l'axe magnétique du cristal se placera dans la direction des lignes de force; si, au contraire, l'ellipsoïde d'induction magnétique est un ellipsoïde de révolution aplati, cas auquel

---

([1]) V. MALLARD, *Traité de Cristallographie*, t. II, p. 537.

le cristal est *magnétiquement négatif,* l'axe magnétique du cristal se placera perpendiculairement à la direction des lignes de force.

§ 3. — Vérifications expérimentales.

Supposons que l'on suspende un cristal de manière qu'il ne puisse tourner qu'autour de l'axe $O\xi$ et que les lignes de force du champ soient normales à l'axe de rotation. Soit J l'intensité du champ et ψ l'angle que fait cette intensité avec $O\eta$. Nous aurons

$$F = 0, \qquad G = J\cos\psi, \qquad H = J\sin\psi.$$

Supposons, en outre, que l'on ait

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

L'égalité (6) deviendra

$$\mathcal{F} = -\frac{R^3}{2} J^2 \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2} \cos^2\psi + \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3} \sin^2\psi \right).$$

Nous aurons donc

$$\delta\mathcal{F} = R^3 J^2 \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3} \right) \sin\psi \cos\psi \, d\psi.$$

L'équilibre a lieu au moment où l'axe $O\eta$ est dirigé suivant les lignes de force du champ, c'est-à-dire au moment où l'on a

$$\sin\psi = 0, \qquad \cos\psi = 1.$$

Si l'on écarte le cristal d'un angle $d\psi$ de cette position d'équilibre, le couple qui tend à l'y ramener a pour moment

$$R^3 J^2 \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3} \right) d\psi.$$

Le cristal, ainsi écarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même, effectuera des oscillations isochrones, dont la durée

T_1 sera donnée par l'équation suivante :

$$\frac{1}{T_1^2} = \frac{R^3 J^2}{\pi^2 K} \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_2} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_3} \right), \tag{11}$$

K désignant le moment d'inertie de la sphère cristalline par rapport à un axe passant par son centre.

Si l'on faisait osciller la sphère autour de l'axe $O\eta$, placé normalement aux lignes de force du champ, on aurait une durée d'oscillation T_2 donnée par

$$\frac{1}{T_2^2} = \frac{R^3 J^2}{\pi^2 K} \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_1} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_3} \right). \tag{11 bis}$$

Enfin, si l'on faisait osciller la sphère autour de l'axe $O\zeta$, placé normalement aux lignes de force du champ, on aurait une durée d'oscillation T_3 donnée par

$$\frac{1}{T_3^2} = \frac{R^3 J^2}{\pi^2 K} \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_1} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_2} \right). \tag{11 ter}$$

La comparaison des égalités (11), (11 *bis*), (11 *ter*) conduit à cette relation remarquable

$$\frac{1}{T_2^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_3^2}. \tag{12}$$

Plücker ([1]), qui a démontré cette relation (12), l'a soumise au contrôle de l'expérience.

Dans un beau cristal de formiate de cuivre, il fit tailler une sphère de 1 centimètre de diamètre environ; il la posa sur un petit anneau de mica très mince tenu par trois fils de soie, et la fit osciller successivement autour de chacun des axes d'aimantation en comptant le nombre des oscillations. Dans deux séries d'observations, l'une faite en excitant l'électro-aimant avec six éléments

---

([1]) J. Plücker, *On the magnetic induction of crystals* (*Philosophical Transactions,* t. II, p. 543; 1858).

de pile, l'autre en excitant l'électro-aimant avec douze éléments, il trouva les nombres d'oscillations par seconde que voici :

	Axes de suspension.		
	$O\xi$.	$O\eta$.	$O\zeta$.
Première série............	22,5 à 23	53	49
Deuxième série...........	31 à 31,5	73	67

La première série donne

$$\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_3^2} = 2918, \qquad \frac{1}{T_2^2} = 2809.$$

La deuxième série donne

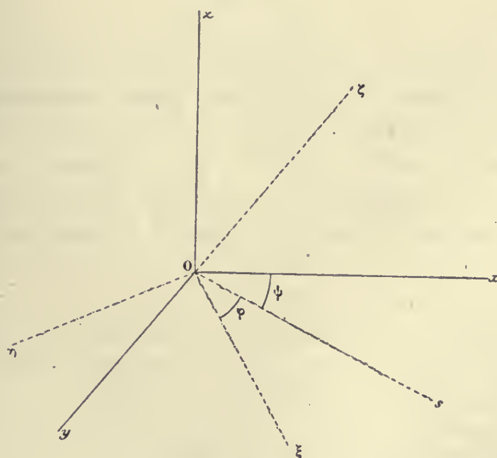
$$\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_3^2} = 5166, \qquad \frac{1}{T_2^2} = 5329.$$

La relation (12) est donc vérifiée avec une exactitude suffisante.

Plücker a indiqué une autre relation susceptible d'être vérifiée par l'expérience.

Soient Ox, Oy, Oz (*fig.* 23) trois axes de coordonnées rectangulaires fixes. Le cristal peut tourner autour de l'axe Oz. L'intensité du champ est dirigée suivant Ox. Oz est dans le plan $\zeta O \xi$. Le plan $\zeta O \xi$ trace sur le plan xOy une droite Os qui fait un

Fig. 23.



angle ψ avec Ox; cette même droite fait un angle φ avec $O\xi$. On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} F &= \quad J \cos\varphi \cos\psi, \\ G &= -J \sin\psi, \\ H &= -J \sin\varphi \cos\psi. \end{aligned}$$

Si l'on suppose $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, l'égalité (6) deviendra

$$\mathcal{F} = -\frac{R^3}{2} J^2 \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_1} \cos^2\varphi \cos^2\psi + \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2} \sin^2\psi + \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3} \sin^2\varphi \cos^2\psi \right).$$

Si l'on fait tourner le cristal d'un angle infiniment petit autour de Oz, ψ augmentera d'une quantité $d\psi$ égale à celle dont le cristal a tourné, tandis que φ ne variera pas; $\mathcal{F}$ éprouvera un accroissement

$$\delta\mathcal{F} = -\frac{R^3}{2} J^2 \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_1} \cos^2\varphi - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2} + \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3} \sin^2\varphi \right) \sin 2\psi \, d\psi.$$

La condition d'équilibre s'exprime en écrivant que

$$\delta\mathcal{F} = 0,$$

ce qui donne

$$\sin 2\psi = 0.$$

Suivant les grandeurs des diverses quantités qui figurent dans la parenthèse, l'équilibre stable a lieu lorsque $O\zeta$ est dans le plan zOx ou lorsque le plan $zO\zeta$ est perpendiculaire au plan zOx.

Si le cristal est écarté d'un petit angle $d\psi$ de sa position d'équilibre, le moment du couple qui tend à le ramener à cette position est égal en valeur absolue à

$$R^2 J^2 \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_2} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_1} \cos^2\varphi - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_3}{1+\frac{4}{3}\pi\varpi_3} \sin^2\varphi \right) d\psi.$$

Supposons que le cristal soit un cristal magnétiquement uniaxe et positif. Nous aurons alors

$$\varpi_1 > \varpi_2 = \varpi_3,$$

et le moment du couple aura pour valeur

$$R^2 J^2 \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_1} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_2} \right) \cos^2\varphi \, d\psi.$$

La durée d'oscillation du cristal faiblement écarté de sa position d'équilibre aura une valeur T donnée par la formule

$$(13) \qquad \frac{1}{T^2} = \frac{R^2 J^2}{\pi^2 K} \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_1} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_2} \right) \cos^2\varphi.$$

Supposons en particulier que $O\xi$ coïncide avec Oz. Nous aurons alors

$$\varphi = \pi, \qquad \cos\varphi = -1,$$

et la durée d'oscillation T_0 sera donnée, d'après l'égalité (13), par la formule

$$\frac{1}{T_0^2} = \frac{R^2 J^2}{\pi^2 K} \left(\frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_1}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_1} - \frac{\frac{4}{3}\pi\varpi_2}{1 + \frac{4}{3}\pi\varpi_2} \right).$$

On a donc

$$(14) \qquad \frac{T_0^2}{T^2} = \cos^2\varphi.$$

Cette remarquable égalité a été vérifiée par Plücker au moyen d'une sphère taillée dans un cristal de sulfate de fer. Nous avons vu que cette substance était magnétiquement uniaxe.

§ 4. — Action d'un champ uniforme sur un cristal faiblement magnétique plongé dans un milieu faiblement magnétique.

Les divers théorèmes que nous venons de démontrer ne supposent rien sur la grandeur des coefficients principaux d'aimantation du cristal. Nous allons exposer maintenant les propositions approximatives que l'on peut établir en supposant ces coefficients très petits. Cette théorie, donnée par Plücker [1] en 1858, présente deux avantages : en premier lieu, elle peut s'établir en sup-

---

[1] PLÜCKER, *loc. cit.*

posant le cristal plongé dans un milieu isotrope peu magnétique, hypothèse qu'il est nécessaire de faire pour rendre compte des propriétés des cristaux diamagnétiques; en second lieu, elle permet d'étendre à des cristaux de forme quelconque des propriétés qui, dans la théorie précédente, n'étaient présentées que par les corps sphériques. Ces deux avantages justifient le développement que nous allons donner à l'exposé de cette théorie.

Par des raisonnements analogues à ceux qui ont été employés au Chapitre VII du Livre précédent, on prouvera sans peine que le cristal peu magnétique et le milieu peu magnétique dans lequel il est plongé s'aimantent tous deux comme si chacun d'eux existait seul. Les équations de l'équilibre magnétique, rapportées aux axes principaux d'aimantation du cristal, seront, pour le cristal,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}_2 &= -\varpi_1\left(\lambda + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi}\right),\\ \mathfrak{B}_2 &= -\varpi_2\left(\mu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \eta}\right),\\ \mathfrak{C}_2 &= -\varpi_3\left(\nu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \zeta}\right),\end{aligned}\right.$$

et, pour le milieu,

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}_3 &= -k_3\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi},\\ \mathfrak{B}_3 &= -k_3\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \eta},\\ \mathfrak{C}_3 &= -k_3\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \zeta}\end{aligned}\right.$$

Si le champ est uniforme, le corps et le milieu s'aimantent tous deux uniformément. Dans le milieu, l'aimantation est dirigée comme l'intensité du champ créé par les aimants permanents. Il n'en est plus de même dans le cristal. En reproduisant des considérations analogues à celles que nous avons indiquées au Chapitre II, § 1, on arrive au résultat suivant :

Dans l'ellipsoïde inverse d'induction magnétique

$$\varpi_1\xi^2 + \varpi_2\eta^2 + \varpi_3\zeta^2 = 1,$$

on mène une demi-droite D *dont les cosinus directeurs soient proportionnels à*

$$-\left(\lambda + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \xi}\right),\qquad -\left(\mu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \eta}\right),\qquad -\left(\nu + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \zeta}\right);$$

par le centre de l'ellipsoïde, on mène le plan conjugué à cette direction D, *et, du côté de ce plan où se trouve la direction* D, *on lui mène une normale* N. *Cette normale marque la direction de l'aimantation.*

La partie variable du potentiel thermodynamique interne du système pourra s'écrire, en désignant par v_2 le volume du cristal et par v_3 l'espace illimité occupé par le milieu magnétique,

$$\mathfrak{F} = \int \left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \xi_2} \right\| dv_2 + \int \left\| \mathfrak{A}_3 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \xi_3} \right\| dv_3 + \int \mathfrak{F}_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_3$$
$$+ \int \left(\frac{\mathfrak{A}_2^2}{2\varpi_1} + \frac{\mathfrak{B}_2^2}{2\varpi_2} + \frac{\mathfrak{C}_2^2}{2\varpi_3} + \lambda \mathfrak{A}_2 + \mu \mathfrak{B}_2 + \nu \mathfrak{C}_2 \right) dv_2.$$

Nous aurons d'ailleurs, en vertu des égalités (16),

$$\int \left[\left\| \mathfrak{A}_3 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \xi_3} \right\| + \mathfrak{F}_3(\mathfrak{M}_3) \right] dv_3 = -\int \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_3.$$

De plus, en vertu d'un théorème démontré au Livre IX, Chapitre IX, § 1, la somme

$$\int \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_3 + \int \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_2$$

ne varie pas. Enfin, d'après un calcul fait au § 3 du même Chapitre, on a

$$\int \Psi_3(\mathfrak{M}_3)\, dv_2 = \frac{k_3}{2} \int \Pi \mathfrak{V}_1\, dv_2.$$

Si nous conservons les notations des paragraphes précédents, nous aurons

$$\Pi \mathfrak{V}_1 = F^2 + G^2 + H^2,$$

et le potentiel thermodynamique interne, réduit à ses termes variables, pourra s'écrire

$$\mathfrak{F} = \int \left(\left\| \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \xi_2} \right\| + \frac{\mathfrak{A}_2^2}{2\varpi_1} + \frac{\mathfrak{B}_2^2}{2\varpi_2} + \frac{\mathfrak{C}_2^2}{2\varpi_3} + \lambda \mathfrak{A}_2 + \mu \mathfrak{B}_2 + \nu \mathfrak{C}_2 \right) dv_2$$
$$+ \frac{k_3}{2} \int (F^2 + G^2 + H^2)\, dv_2.$$

Les égalités (16) apportent à cette expression une dernière trans-

formation et permettent d'écrire

$$(17)\quad \mathcal{F} = -\frac{1}{2}[\varpi_1(F-\lambda)^2+\varpi_2(G-\mu)^2+\varpi_3(H-\nu)^2-k_3(F^2+G^2+H^2)]v_2.$$

Lorsqu'on déplace le cristal, la quantité $\mathcal{F}$ subit une variation $\delta\mathcal{F}$ égale, au signe près, au travail des forces magnétiques qui agissent sur le cristal.

La forme (17) de la quantité $\mathcal{F}$ nous montre, en premier lieu, que les actions magnétiques qui s'exercent sur le cristal sont réductibles à un couple.

L'expression (17) est susceptible, dans le cas (qui est seul intéressant pour l'étude du magnétisme) où l'on a

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0,$$

d'une interprétation géométrique analogue à celle que nous avons donnée de l'expression (6). Dans ce cas, en effet, l'égalité (17) peut s'écrire

$$(18)\quad \mathcal{F} = -\frac{1}{2}[(\varpi_1-k_3)F^2+(\varpi_2-k_3)G^2+(\varpi_3-k_3)H^2].$$

Considérons les deux surfaces du second ordre S et S′ définies, la première par l'équation

$$(19)\quad \frac{\xi^2}{\varpi_1-k_3}+\frac{\eta^2}{\varpi_2-k_3}+\frac{\zeta^2}{\varpi_3-k_3}=1,$$

et la seconde par l'équation

$$(20)\quad (\varpi_1-k_3)\xi'^2+(\varpi_2-k_3)\eta'^2+(\varpi_3-k_3)\zeta'^2=1.$$

Ces deux surfaces ne sont plus forcément, comme les surfaces E et E′, des ellipsoïdes réels; ce peuvent être aussi des ellipsoïdes imaginaires, ou bien encore des hyperboloïdes à une ou à deux nappes.

Dans tous les cas qui ont été expérimentalement étudiés, les trois quantités

$$\varpi_1-k_3, \quad \varpi_2-k_3, \quad \varpi_3-k_3$$

ont offert le même signe, en sorte que, dans tous ces cas, les surfaces S et S′ sont ou bien deux ellipsoïdes réels, ou bien deux ellipsoïdes imaginaires. Dans le premier cas, le cristal est dit paramagnétique; dans le second cas, il est dit diamagnétique.

Menons, par le centre commun O des deux surfaces S et S′ une demi-droite dirigée comme l'intensité du champ. Elle rencontre la première en un point réel ou imaginaire M et la seconde en un point réel ou imaginaire M′. Posons

$$\mathrm{OM} = \rho, \qquad \mathrm{OM}' = \rho'.$$

Soit J l'intensité du champ. Nous aurons

$$\mathcal{F} = -\frac{\upsilon_2 J^2}{2}\frac{\rho^2}{\rho'^2}, \tag{21}$$

formule qu'il sera aisé de discuter comme nous avons déjà discuté l'égalité (10).

Supposons, en premier lieu, le cristal absolument libre de s'orienter. Il atteindra sa position d'équilibre stable lorsque $\mathcal{F}$ aura pris sa valeur minimum, c'est-à-dire lorsque $\frac{\rho^2}{\rho'^2}$ aura pris sa valeur maximum. Si l'on a

$$\varpi_1 > \varpi_2 > \varpi_3,$$

cette position sera atteinte au moment où l'axe principal d'aimantation Oξ sera parallèle aux lignes de force du champ.

Supposons, en second lieu, le cristal libre seulement de tourner autour de l'un des axes principaux d'aimantation, l'intensité du champ étant d'ailleurs normale à cette droite autour de laquelle le cristal est mobile. Les deux autres axes correspondront en général à des coefficients principaux d'aimantation d'inégale grandeur. Dans ce cas, celui des deux axes mobiles qui correspond au plus grand coefficient d'aimantation viendra se placer suivant les lignes de force du champ.

Si le cristal est uniaxe au point de vue magnétique et si l'axe de révolution de l'ellipsoïde d'induction magnétique coïncide avec l'axe autour duquel le cristal peut tourner, l'équilibre du cristal sera indifférent dans toutes les positions.

En général, les deux surfaces S et S′, définies par les égalités (19) et (20), n'admettent pas les mêmes directions de sections circulaires. Mais, dans la pratique, il se trouve que les plans des sections circulaires de la surface S diffèrent très peu des plans des sections circulaires de la surface S′; tout comme, en Optique, les

axes de réfraction conique intérieure diffèrent peu des axes de réfraction conique extérieure.

Cela posé, rendons le cristal mobile autour d'une droite qui diffère peu de la normale aux sections circulaires de la surface S et de la normale aux sections circulaires de la surface S′ et supposons les lignes de force du champ normales à cette droite autour de laquelle le cristal peut tourner. L'équilibre du cristal sera à peu près indifférent.



CHAPITRE IV.

AIMANTATION DES CORPS PEU DÉFORMÉS.

§ 1. — Aimantation d'un corps quelconque peu déformé.

Nous avons vu que l'aimantation d'un corps parfaitement doux quelconque dépendait de la fonction

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{C} \\ \qquad + \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}^2 \\ \qquad + \varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}\mathfrak{A} + \varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \end{cases}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant les composantes de l'aimantation suivant trois droites rectangulaires dont l'orientation soit connue lorsqu'on connaît la nature du corps au point que l'on considère; ce peuvent être, *par exemple,* les axes d'élasticité de la substance au point considéré.

Les trois coefficients λ, μ, ν et les six fonctions $\varphi_{pq}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ changent si l'on modifie l'état de la substance au point considéré, si, par exemple, on la déforme; de là la nécessité d'étudier spécialement l'aimantation d'un corps déformé. Les formules auxquelles nous allons parvenir dans cette étude nous seront d'un grand usage pour les recherches qui seront exposées aux Livres XI et XII.

Imaginons un corps qui, à partir d'un certain état initial, nommé *état naturel,* a subi une petite déformation. Prenons un point quelconque M à l'intérieur de ce corps. Par ce point menons les trois droites rectangulaires $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$, qui servaient d'axes d'élasticité à la matière qui se trouve en ce point avant la déformation. Supposons le corps homogène à l'état naturel, de sorte que ces trois droites aient même direction en tout point du corps.

La déformation dont il s'agit a donné au point M, par rapport à un système de coordonnées fixe, un déplacement dont les composantes suivant Mξ, Mη, Mζ sont U, V, W. On sait alors que la très petite déformation subie par la substance qui se trouve au point M sera définie par la connaissance des six quantités

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \dfrac{\partial V}{\partial \eta}, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \zeta}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \xi} + \dfrac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad \dfrac{\partial U}{\partial \eta} + \dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \end{array} \right.$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées du point M, par rapport à un système de coordonnées Oξ, Oη, Oζ dont les axes sont parallèles à Mξ, Mη, Mζ.

Les trois quantités λ, μ, ν et les six fonctions φ_{pq} qui figurent dans l'expression (1) de $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ seront des fonctions des six déformations (2); on pourra les regarder comme des fonctions linéaires, si les six déformations sont toutes très petites. On pourra, par exemple, écrire

$$\lambda = \lambda_0 + l_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} + l_2 \frac{\partial V}{\partial \eta} + l_3 \frac{\partial W}{\partial \zeta} + l_4 \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) + l_5 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + l_6 \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} \right),$$

les sept quantités λ_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 dépendant de la nature de la substance à l'état naturel.

On voit sans peine comment, de ce point de départ, on déduirait une théorie complète de l'aimantation des corps peu déformés. Nous n'avons pas l'intention de développer ici cette théorie dans son ensemble. Nous nous bornerons à insister sur quelques questions particulièrement importantes.

La première de ces questions est relative aux changements que peuvent subir les quantités λ, μ, ν par l'effet d'une déformation.

Si la constitution de la substance à l'état naturel est holomorphe, cas auquel un centre figure au nombre des éléments de symétrie de cette substance à l'état naturel, il est aisé de voir que la substance faiblement déformée est encore sensiblement holomorphe. Donc, pour une substance dont la symétrie comporte un centre, λ est égal à o quelles que soient les six déforma-

tions (2); en d'autres termes, on a

$$\lambda_0 = 0, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 0,$$
$$l_4 = 0, \quad l_5 = 0, \quad l_6 = 0.$$

Considérons maintenant les substances hémimorphes, c'est-à-dire les substances dont la constitution n'admet pas de centre de symétrie. Bien qu'une pareille substance, à l'état naturel, n'admette pas de centre, il peut arriver que l'on ait, pour cette substance,

$$\lambda_0 = 0, \quad \mu_0 = 0, \quad \nu_0 = 0.$$

En effet, le système formé par l'origine des coordonnées et l'une quelconque des surfaces d'aimantation représentées par l'équation

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta \\ &+ \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\xi^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\eta^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\zeta^2 \\ &+ \varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\eta\zeta + \varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\zeta\xi + \varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\xi\eta = 1 \end{aligned} \right.$$

doit toujours présenter une symétrie au moins égale à celle de la substance à laquelle il se rapporte.

Or cette condition peut exiger que cette surface ait toujours pour centre l'origine des coordonnées sans que, pour cela, le cristal ait un centre.

Imaginons, par exemple, que la symétrie de la substance considérée comporte un axe d'ordre quelconque, binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire.

Une rotation d'un angle égal ou inférieur à π autour d'une droite parallèle à cet axe, menée par l'origine des coordonnées, devra ramener à sa position primitive la surface (3). Cela exige :

1° Qu'une parallèle à l'axe cristallographique considéré, menée par l'origine des coordonnées, passe par le centre de la surface (3);

2° Que cette droite soit un des axes principaux de la surface (3).

Si la substance admet un autre axe de symétrie, on pourra énoncer pour ce second axe des propositions analogues, et le centre de la surface (3) devra coïncider avec l'origine des coordonnées. Il en sera encore de même si la substance admet un plan de symétrie normal au premier axe.

Ainsi, *on peut avoir nécessairement pour une substance*

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0, \tag{4}$$

lors même que cette substance n'admet pas de centre; il suffit qu'elle possède plus d'un axe de symétrie [1], *ou un axe de symétrie et un plan de symétrie normal à cet axe.*

Si nous prenons, par exemple, le quartz plagièdre à l'état naturel, ce corps n'admet pas de centre; mais il admet un axe de symétrie ternaire et un plan de symétrie normal à cet axe; les trois coefficients λ, μ, ν seront donc égaux à o pour le quartz plagièdre à l'état naturel.

Les substances présentant les éléments de symétrie que nous venons de considérer se rapprochent, on le voit, des substances holomorphes par ce fait que, pour les unes comme pour les autres, on a

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

Mais une différence radicale les sépare.

Pour une substance holomorphe, on a

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0,$$

non seulement lorsque la substance est à l'état naturel, mais encore lorsqu'elle a subi une légère déformation; car il est aisé de voir qu'une substance qui présente, au nombre de ses éléments de symétrie, un centre dans l'état naturel, présente encore un centre lorsqu'elle a subi une déformation infiniment petite.

Il n'en est plus de même pour les substances qui, sans admettre de centre, admettent plusieurs axes de symétrie, ou un axe de symétrie et un plan de symétrie normal à cet axe. Pour ces substances, prises à l'état naturel, les égalités (4) sont vérifiées, mais elles peuvent ne plus l'être après une déformation infiniment petite altérant la symétrie primitive de la substance.

Une remarque importante relative à ce cas est la suivante :

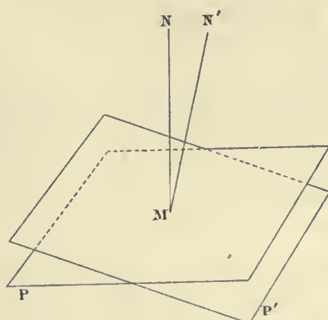
Soit M (*fig.* 24) un point pris à l'intérieur d'un corps qui, à l'état naturel, présente un plan de symétrie P; MN est la normale

---

[1] *Voir* MALLARD, *Traité de Cristallographie*, t. II, p. 571. — D'après cela, les seuls corps où λ, μ, ν puissent différer de o sont les corps auxquels les cristallographes allemands réservent le nom d'*hémimorphes*.

à ce plan de symétrie. Faisons subir au corps une légère déformation. Le plan P vient en P′, la direction MN en MN′, *celle-ci n'étant plus normale au plan* P′; il est facile de voir que le plan P′ est, pour la substance déformée, au point M, un plan de

Fig. 24.



symétrie oblique, la direction de symétrie étant MN′. On en conclut aisément que la grandeur géométrique (λ, μ, ν) n'a pas de composante suivant MN′; elle est normale à MN′. Comme, d'ailleurs, la direction MN′ diffère infiniment peu de MN, on peut dire aussi que la grandeur (λ, μ, ν) n'a pas de composante suivant MN.

Ces diverses remarques, peu utiles dans l'étude du magnétisme où, jusqu'ici, l'influence des quantités λ, μ, ν n'a pas été aperçue, ont une importance prépondérante dans l'étude des cristaux pyroélectriques et piézo-électriques, comme on le verra au Livre suivant.

§ 2. — Aimantation d'un corps isotrope peu déformé.

Considérons un corps solide, isotrope dans l'état naturel. Imaginons que ce corps éprouve une légère déformation quelconque. L'état de ce corps en un point est défini lorsqu'on connaît en ce point l'orientation des axes principaux de dilatation OX, OY, OZ et les grandeurs l, l', l'' des trois dilatations principales. Rapportée à ces axes, la surface d'aimantation représentée par l'équation (3) doit se réduire à la forme

$$\varphi_{11}(A, B, C)X^2 + \varphi_{22}(A, B, C)Y^2 + \varphi_{33}(A, B, C)Z^2 = 1,$$

A, B, C étant les composantes de l'aimantation suivant les trois axes principaux de dilatation.

Les quantités $\varphi_{11}(A, B, C)$, $\varphi_{22}(A, B, C)$, $\varphi_{33}(A, B, C)$ sont des fonctions de l, l', l''. Si les quantités l, l', l'' sont très petites, on pourra admettre qu'elles figurent linéairement dans les fonctions dont il s'agit. Quelques considérations de symétrie montreront sans peine que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}
\varphi_{11}(A, B, C) &= F(A, B, C) + l\,G(A, B, C) + l'H(A, B, C) + l''H(A, C, B),\\
\varphi_{22}(A, B, C) &= F(B, C, A) + l'\,G(B, C, A) + l''H(B, C, A) + l\,H(B, A, C),\\
\varphi_{33}(A, B, C) &= F(C, A, B) + l''G(C, A, B) + l\,H(C, A, B) + l'H(C, B, A).
\end{aligned}$$

Supposons que l'on ait

$$l = l' = l'';$$

le corps, primitivement isotrope, sera encore isotrope après la déformation. La surface d'aimantation devra, dans ce cas, se réduire à une sphère et, en désignant par $\mathfrak{M}$ l'intensité d'aimantation, avoir une équation de la forme

$$[f(\mathfrak{M}) + 3lg(\mathfrak{M})](X^2 + Y^2 + Z^2) = 1.$$

On doit donc avoir, quels que soient A, B, C,

$$\begin{aligned}
F(A, B, C) + l[G(A, B, C) + H(A, B, C) + H(A, C, B)] &= f(\mathfrak{M}) + 3lg(\mathfrak{M}),\\
F(B, C, A) + l[G(B, C, A) + H(B, C, A) + H(B, A, C)] &= f(\mathfrak{M}) + 3lg(\mathfrak{M}),\\
F(C, A, B) + l[G(C, A, B) + H(C, A, B) + H(C, B, A)] &= f(\mathfrak{M}) + 3lg(\mathfrak{M}).
\end{aligned}$$

Faisant d'abord $l = 0$, on trouve

$$F(A, B, C) = F(B, C, A) = F(C, A, B) = f(\mathfrak{M}).$$

Il reste

$$\begin{aligned}
G(A, B, C) + H(A, B, C) + H(A, C, B) &= 3g(\mathfrak{M}),\\
G(B, C, A) + H(B, C, A) + H(B, A, C) &= 3g(\mathfrak{M}),\\
G(C, A, B) + H(C, A, B) + H(C, B, A) &= 3g(\mathfrak{M}).
\end{aligned}$$

On satisfera à ces égalités si l'on pose

$$\begin{aligned}
&H(A, B, C) = H(A, C, B)\\
&= H(B, C, A) = H(B, A, C)\\
&= H(C, A, B) = H(C, B, A) = h(\mathfrak{M})
\end{aligned}$$

et

$$G(A, B, C) = G(B, C, A) = G(C, A, B) = h'(\mathfrak{M}).$$

Si nous prenons alors

$$k(\mathfrak{M}) = h'(\mathfrak{M}) - h(\mathfrak{M}),$$

la surface d'aimantation, rapportée aux axes principaux de dilatation, aura pour équation

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &[f(\mathfrak{M}) + (l + l' + l'')h(\mathfrak{M}) + l\,k(\mathfrak{M})]X^2 \\ &+[f(\mathfrak{M}) + (l + l' + l'')h(\mathfrak{M}) + l'k(\mathfrak{M})]Y^2 \\ &+[f(\mathfrak{M}) + (l + l' + l'')h(\mathfrak{M}) + l''k(\mathfrak{M})]Z^2 = 1. \end{aligned}\right.$$

Cherchons maintenant l'équation de cette surface rapportée à des axes rectangulaires quelconques $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Soient U, V, W les composantes suivant ces axes du déplacement qu'a subi le point auquel se rapporte notre surface. Adoptons les notations suivantes pour les cosinus des angles des axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ avec les axes OX, OY, OZ.

	$O\xi$	$O\eta$	$O\zeta$
OX	a_1	b_1	c_1
OY	a_2	b_2	c_2
OZ	a_3	b_3	c_3

Nous aurons les relations suivantes, démontrées par Cauchy, et dont il est fait un fréquent usage dans la théorie de l'élasticité :

$$l + l' + l'' = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

$$a_1^2 l + a_2^2 l' + a_3^2 l'' = \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$b_1^2 l + b_2^2 l' + b_3^2 l'' = \frac{\partial V}{\partial \eta},$$

$$c_1^2 l + c_2^2 l' + c_3^2 l'' = \frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

$$b_1 c_1 l + b_2 c_2 l' + b_3 c_3 l'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\right),$$

$$c_1 a_1 l + c_2 a_2 l' + c_3 a_3 l'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right),$$

$$a_1 b_1 l + a_2 b_2 l' + a_3 b_3 l'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi}\right),$$

et l'équation (5) de la surface d'aimantation deviendra

$$(6)\quad \begin{cases} \left[f(\mathfrak{M})+h(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}+\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)+k(\mathfrak{M})\frac{\partial U}{\partial\xi}\right]\xi^2 \\ +\left[f(\mathfrak{M})+h(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}+\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)+k(\mathfrak{M})\frac{\partial V}{\partial\eta}\right]\eta^2 \\ +\left[f(\mathfrak{M})+h(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}+\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)+k(\mathfrak{M})\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right]\zeta^2 \\ +k(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}+\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)\eta\zeta \\ +k(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}+\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right)\zeta\xi+k(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)\xi\eta=1. \end{cases}$$

Cette équation de la surface d'aimantation une fois connue, il devient facile d'étudier l'aimantation d'une substance isotrope légèrement déformée.

Traitons seulement le cas qui correspond à l'*approximation de Poisson,* c'est-à-dire le cas où l'on a

$$f(\mathfrak{M})=f,\qquad h(\mathfrak{M})=h,\qquad k(\mathfrak{M})=k,$$

f, h, k étant trois quantités indépendantes de l'intensité $\mathfrak{M}$ de l'aimantation.

Nous aurons alors [Chap. I, égalités (6)]

$$(7)\quad \begin{cases} 2\left[f+h\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}+\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)+k\frac{\partial U}{\partial\xi}\right]\mathfrak{A}+2k\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)\mathfrak{B} \\ \qquad +2k\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}+\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right)\mathfrak{C}=-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}, \\ 2\left[f+h\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}+\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)+k\frac{\partial V}{\partial\eta}\right]\mathfrak{B}+2k\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}+\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)\mathfrak{C} \\ \qquad +2k\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)\mathfrak{A}=-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}, \\ 2\left[f+h\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}+\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)+k\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right]\mathfrak{C}+2k\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}+\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right)\mathfrak{A} \\ \qquad +2k\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}+\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)\mathfrak{B}=-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}. \end{cases}$$

Telles sont les équations qui déterminent, dans ce cas, les composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de l'aimantation suivant les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.



LIVRE XI.

LES CORPS DIÉLECTRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

POTENTIEL THERMODYNAMIQUE D'UN SYSTÈME RENFERMANT DES DIÉLECTRIQUES.

§ 1. — Potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des corps diélectriques électrisés et polarisés.

Après avoir exposé, dans les Livres précédents, les principales propriétés des aimants, nous allons revenir à l'étude des phénomènes électriques et examiner les propriétés des *corps diélectriques;* les calculs que nous avons eu à faire en exposant la théorie des corps aimantés pourront servir presque en entier à la recherche des propriétés des diélectriques.

C'est, d'ailleurs, en imitant les représentations qui avaient été adoptées pour résumer les phénomènes présentés par les aimants que les physiciens sont parvenus à représenter aussi les phénomènes présentés par les corps diélectriques.

Coulomb avait représenté les aimants comme un assemblage de petites particules conductrices pour les fluides magnétiques, renfermant chacune des quantités égales des deux fluides, séparées les unes des autres par un milieu imperméable aux fluides magnétiques. Mossotti (¹) imagine de la même manière que les dié-

(¹) Mossotti, *Recherches théoriques sur l'induction électrostatique envisagée d'après les idées de Faraday* (*Biblioth. universelle, Archives d'électricité*, t. V, p. 193; 1847). — *Discussione analitica sull' influenza che l'azione di un*

lectriques sont formés de petits corps conducteurs, dont chacun renferme des quantités égales des deux fluides électriques, et qui sont séparés les uns des autres par un milieu isolant; Faraday (¹) avait auparavant adopté cette opinion.

Poisson, par une analyse qui n'est pas exempte de défauts, a déduit de l'hypothèse de Coulomb une théorie de l'aimantation par influence. Une analyse identique à celle de Poisson, appliquée à l'hypothèse de Mossotti, conduit Clausius (²) à une théorie de l'électrisation des corps diélectriques.

Enfin, de même que Sir W. Thomson a rendu la théorie de l'aimantation par influence sauve de toute hypothèse sur la nature des aimants, on peut, en suivant les idées de Maxwell (³), rendre la théorie des milieux diélectriques sauve de toute hypothèse sur la constitution de ces milieux.

Dans l'ensemble des études qui forment les six premiers Livres de cet Ouvrage, l'état d'électrisation d'un corps est regardé comme complètement défini lorsqu'on connaît la densité électrique solide en tout point intérieur à ce corps et la densité électrique superficielle en tout point de la surface de ce corps. Une semblable définition suffit, dans un grand nombre de cas, à représenter les phénomènes présentés par un corps électrisé; mais elle ne suffit pas toujours. Pour faire rentrer dans la représentation adoptée un plus grand nombre de phénomènes électriques, on est amené à compléter cette représentation par l'introduction d'une nouvelle classe de paramètres.

Dorénavant, nous admettrons que, pour connaître complètement l'état d'électrisation d'un système il faut connaître :

1° En chaque point des surfaces de discontinuité qu'il renferme, *la densité électrique superficielle;*

---

mezzo dielettrico ha sulla distribuzione dell' elettricità alla superfizie dei più corpi elettrici disseminati in esso (*Mémoires de la Soc. ital. de Modène*, t. XXIV, p. 49; 1850).

(¹) FARADAY, *Experimental researches in Electricity*, série XI, § 6; nov. 1837.

(²) R. CLAUSIUS, *Sur le changement d'état intérieur qui a lieu pendant la charge dans la couche isolante d'un carreau de Franklin ou d'une bouteille de Leyde, et sur l'influence de ce changement sur les phénomènes de la décharge;* 1866 (*Théorie mécanique de la chaleur*, trad. Folie, 1re édition, t. II, p. 86).

(³) MAXWELL, *Treatise on electricity and magnetism*, passim.

2° En chaque point des volumes de constitution homogène ou variable d'une manière continue qui le forment :

A. *La densité électrique solide;*

B. Une grandeur géométrique, variable d'un point à l'autre d'une manière continue; nous donnerons à cette grandeur géométrique le nom d'*induction diélectrique*.

Nous allons chercher la forme que doit présenter le potentiel thermodynamique interne d'un semblable système; nous serons aidés dans cette recherche par les résultats déjà obtenus au Livre IX, Chapitre I. Les premières définitions des paramètres qui déterminent l'état d'électrisation d'un système sont, en effet, entièrement analogues aux premières définitions des paramètres qui déterminent un système électrisé et aimanté; l'*induction diélectrique* remplace simplement l'*intensité d'aimantation;* mais les hypothèses ultérieures faites sur ces deux sortes de paramètres établissent ensuite entre eux des différences.

Ces différences mêmes, comme nous l'allons voir, ne portent que sur un point.

Que l'on reprenne tout ce qui, au § 2 du Chapitre I (Livre IX), précède l'égalité (11), en remplaçant seulement le mot *intensité d'aimantation* par le mot *induction diélectrique* et le *fluide fictif magnétique* par un *fluide fictif diélectrique;* puis, arrivé à l'hypothèse qu'exprime l'égalité (11), que l'on modifie de la manière suivante l'énoncé de cette hypothèse :

Soit une distribution fictive équivalente à l'élément dv_2. Elle est formée par des quantités de fluide diélectrique fictif $\mu_2, \mu'_2, \mu''_2, \ldots, \mu_2^{(n)}$ *concentrées en des points* $M_2, M'_2, M''_2, \ldots, M_2^{(n)}$. *L'élément dv_2 porte en outre des charges électriques libres* $\mu_2^{(n+1)}, \ldots, \mu_2^{(p)}$ *concentrées en des points* $M_2^{(n+1)}, \ldots, M_2^{(p)}$. *On peut écrire*

$$(1) \qquad \mho_{12} = \chi_{12} + \chi'_{12} + \chi''_{12} + \ldots + \chi_{12}^{(n)} + 2\chi_{12}^{(n+1)} + 2\chi_{12}^{(p)};$$

$\chi_{12}^{(m)}$ *dépend uniquement de la masse* $\mu_2^{(m)}$ *et de la situation respective des deux points* $M_1, M_2^{(m)}$; IL EN DÉPEND DE LA MÊME MANIÈRE, QUE LA MASSE $\mu_2^{(m)}$ SOIT UNE MASSE DE FLUIDE DIÉLECTRIQUE FICTIF OU UNE MASSE DE FLUIDE ÉLECTRIQUE.

En suivant alors la marche indiquée au Livre IX, Chapitre I,

§ 2, nous trouverons que l'on a

$$\chi_{12}^{(m)} = \mu_2^{(m)} \varphi(r_{12}),$$

puis, que l'on peut écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{V}_1 = & \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \varphi(r_{12})}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \left\| \mathcal{A}_3 \frac{\partial \varphi(r_{13})}{\partial x_3} \right\| dv_3 + \ldots + \left\| \mathcal{A}_n \frac{\partial \varphi(r_{1n})}{\partial x_n} \right\| dv_n \\ & + 2q\varphi(r) + 2q'\varphi(r') + \ldots + 2q^{(p)}\varphi(r^{(p)}), \end{aligned} \right.$$

q, q', ..., $q^{(p)}$ étant les charges électriques réparties sur le système, et r, r', ..., $r^{(p)}$ les distances de ces charges à un point de l'élément dv_1.

Les égalités (5) et (9) (*loc cit.*) et l'égalité (2) du présent Chapitre ne laissent plus à déterminer, dans l'expression de $\mathfrak{F}''$, que la fonction $\varphi(r)$; nous la déterminerons de la manière suivante :

Tout d'abord nous verrons, comme au Livre IX, Chapitre I, § 2, que :

Les forces qui s'exercent dans un système de diélectriques invariables d'état de polarisation diélectrique et d'électrisation s'obtiennent en adjoignant aux forces qui s'exerceraient dans le système électrisé, mais dépourvu de polarisation diélectrique, un groupe de forces ayant pour potentiel la quantité $\mathfrak{F}''$.

Supposons en particulier que le système se compose d'un élément diélectrique dv_1 polarisé, où l'induction ait pour composantes $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$, et d'un autre élément dv_2, où l'induction électrique soit égale à 0, mais qui porte une charge électrique q_2. D'après ce qui précède, les actions mutuelles des deux éléments dv_1, dv_2 auront pour potentiel la quantité

$$(3) \qquad f = q_2 \, dv_1 \left\| \mathcal{A}_1 \frac{\partial \varphi(r_{12})}{\partial x_1} \right\|.$$

Nous admettrons l'hypothèse suivante :

Pour obtenir les actions qu'un élément diélectrique polarisé exerce sur un autre élément électrisé, on peut remplacer l'élément diélectrique par une distribution équivalente de fluide fictif, puis imaginer que ce fluide fictif exerce sur le fluide électrique les mêmes actions que le fluide électrique lui-même.

Si μ, μ', μ'', ... sont les charges de fluide diélectrique fictif qui forment la distribution équivalente à l'élément dv_1; si r, r', r'', ... sont leurs distances à un point de l'élément dv_2, on voit que, d'après cette hypothèse, le potentiel des actions mutuelles des deux éléments dv_1, dv_2 pourra s'écrire

$$f = \varepsilon q_2 \left(\frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} + \frac{\mu''}{r''} + \ldots \right).$$

Un raisonnement bien facile, et dont l'analogue se trouve au Livre IX, Chapitre I, § 2, permet de transformer cette égalité en la suivante

$$(4) \qquad f = \varepsilon q_2 dv_1 \left\| \mathcal{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial x_1} \right\|.$$

La comparaison des égalités (3) et (4) donne

$$\varphi(r) = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Dès lors, si nous désignons par V_1 la fonction potentielle, en un point de l'élément dv_1, de toutes les charges électriques répandues sur le système; par $\mathfrak{V}_1$ la *fonction potentielle diélectrique* au même point, c'est-à-dire la quantité définie par la formule

$$(5) \qquad \mathfrak{V}_1 = \left\| \mathcal{A}_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial x_2} \right\| dv_2 + \ldots + \left\| \mathcal{A}_n \frac{\partial \frac{1}{r_{1n}}}{\partial x_n} \right\| dv_n,$$

on aura

$$(6) \qquad \Phi_1 = \varepsilon(\mathfrak{V}_1 + 2V_1)$$

et, par conséquent, d'après les égalités (5) et (9) (*loc. cit.*),

$$(7) \qquad \mathfrak{F}'' = \frac{\varepsilon}{2} \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv + \varepsilon \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv,$$

les deux intégrations s'étendant au système tout entier.

Cette détermination de la quantité $\mathfrak{F}''$ repose essentiellement, on le voit, sur la possibilité, dans le calcul des actions extérieures d'un élément diélectrique, de remplacer cet élément par une distribution équivalente de fluide *électrique*.

La détermination des quantités que nous avons désignées par

$\mathfrak{F}'_1, \mathfrak{F}'_2, \ldots, \mathfrak{F}'_n$ se fera exactement comme au Livre IX, Chapitre I, § 2. Nous aurons de même

$$(8) \qquad \mathfrak{F}'_1 = \mathcal{G}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \alpha_1, \beta_1, \ldots)\, dv_1,$$

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ étant les composantes de l'induction diélectrique en un point de l'élément dv_1 suivant trois droites rectangulaires invariablement liées à cet élément (par exemple ses trois axes d'élasticité); $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ étant des paramètres qui définissent l'état de l'élément dv_1.

Les égalités (1) et (4) du Livre IX, Chapitre I, et les égalités (7) et (8) du présent Chapitre déterminent la forme du potentiel thermodynamique interne d'un système renfermant des diélectriques polarisés et électrisés. Cette forme est la suivante :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q \\ &\qquad + \varepsilon \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right\| dv + \frac{\varepsilon}{2} \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv + \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv. \end{aligned} \right.$$

Cette forme rappelle la forme du potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé et aimanté ; elle n'en diffère que par la présence du terme

$$\varepsilon \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right\| dv$$

relatif aux actions mutuelles des éléments électrisés et des éléments polarisés. Le potentiel thermodynamique interne d'un système aimanté ne renferme aucun terme analogue, car, *a priori*, on a admis que les éléments magnétiques n'exerçaient aucune action sur les éléments électrisés.

§ 2. — Corps diélectriques et corps pyro-électriques.

Comme nous l'avons vu (Livre IX, Chap. I, § 3), on a, en général,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \lambda \mathfrak{A} + \mu \mathfrak{B} + \nu \mathfrak{C} \\ &\qquad + \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}^2 \\ &\qquad + 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \end{aligned} \right.$$

λ, μ, ν étant trois quantités indépendantes de $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, et les quantités φ_{pq} étant des fonctions de $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, qui ne croissent

pas au delà de toute limite lorsque les quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ tendent vers o.

Mais cette forme générale n'est pas, en réalité, la plus fréquente; nous avons vu que, dans la grande majorité des cas, la symétrie de la substance exigeait que l'on eût

$$(10) \qquad \lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

Lorsque, pour une substance, ces égalités (10) seront vérifiées, nous dirons simplement que la substance est *diélectrique;* lorsque, au contraire, pour une substance, l'une au moins des trois quantités λ, μ, ν est différente de o, nous dirons que la substance est *pyro-électrique*.

Parmi les substances simplement diélectriques se trouvent, en particulier, les substances isotropes. Pour ces substances, on a simplement

$$(11) \qquad \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{M}),$$

$\mathfrak{M}$ étant l'induction diélectrique et $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ une fonction de cette induction qui est telle que le rapport

$$\frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\mathfrak{M}^2}$$

ne croisse pas au delà de toute limite lorsque $\mathfrak{M}$ tend vers o.

Nous commencerons par étudier les substances simplement diélectriques en insistant spécialement sur les propriétés des corps isotropes; nous examinerons ensuite les propriétés des corps pyro-électriques.

§ 3. — Transformations du potentiel d'un système renfermant des diélectriques.

Reprenons l'égalité (8) qui donne l'expression du potentiel thermodynamique interne d'un système renfermant des diélectriques électrisés et polarisés.

Nous savons [Livre I, Chap. IX, égalité (9)] que l'on peut écrire

$$(12) \qquad W = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dv,$$

l'intégration s'étendant à tous les éléments de volume du système.

Nous avons de même (Livre VII, Chap. III, égalité (17)],

$$(13)\qquad \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv = \frac{1}{4\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \right)^2 \right] dv.$$

Enfin un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir cette dernière formule donne

$$(14)\qquad \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \right) dv.$$

On a donc, en vertu des égalités (12), (13) et (14),

$$(15)\qquad \begin{cases} W + \varepsilon \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv + \frac{\varepsilon}{2} \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv \\ \quad = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int \left\{ \left[\frac{\partial (V + \mathfrak{V})}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (V + \mathfrak{V})}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial (V + \mathfrak{V})}{\partial z} \right]^2 \right\} dv. \end{cases}$$

Si l'on adopte la notation définie au Livre VII, Chapitre III, égalité (18), le second membre peut s'écrire

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} \int \Pi(V + \mathfrak{V})\, dv.$$

Alors, en vertu de l'égalité (15), l'égalité (8) devient

$$(16)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + \sum \Theta q + \frac{\varepsilon}{8\pi} \int \Pi(V + \mathfrak{V})\, dv \\ \qquad + \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv. \end{cases}$$

Cette forme du potentiel thermodynamique interne nous sera d'un fréquent usage.

Voici maintenant une autre transformation qui nous sera également utile en plusieurs circonstances.

Imaginons, pour simplifier, que le système renferme un seul corps électrisé et polarisé; soient

1 l'espace intérieur à ce corps;
2 l'espace illimité extérieur;
S la surface du corps.

Considérons la quantité

$$\int_1 \left\| \mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv.$$

Une intégration par parties permet d'écrire

$$\int_1 \left\| \mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv = -\mathbf{S}\, V[\mathcal{A} \cos(N_1, x) + \mathcal{B} \cos(N_1, y) + \mathcal{C} \cos(N_1, z)]\, dS$$
$$- \int_1 V \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right) dv.$$

Or on a [Livre VIII, Chap. III, égalités (8) et (9)],

$$\Delta \mathfrak{V} = 4\pi \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right)$$
$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_2} = 4\pi \left\| \mathcal{A} \cos(N_1, x) \right\|.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(17) \quad \int_1 \left\| \mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{S}\, V \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_2} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_1 V \Delta \mathfrak{V}\, dv.$$

Le théorème de Green, appliqué à l'espace 1, donne

$$(18) \qquad \int_1 V \Delta \mathfrak{V}\, dv + \mathbf{S}\, V \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_1} dS = \int_1 \mathfrak{V} \Delta V\, dv + \mathbf{S}\, \mathfrak{V} \frac{\partial V}{\partial N_1} dS.$$

D'autre part, comme dans tout l'espace 2, on a

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta \mathfrak{V} = 0,$$

le théorème de Green donne

$$(19) \qquad \mathbf{S}\, V \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_2} dS = \mathbf{S}\, \mathfrak{V} \frac{\partial V}{\partial N_2} dS.$$

Les égalités (17), (18), (19) donnent

$$(20) \quad \int_1 \left\| \mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{S}\, \mathfrak{V} \left(\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_1 \mathfrak{V} \Delta V\, dv.$$

Soient σ la densité superficielle de l'électricité en un point de la surface S et ρ la densité solide de l'électricité en un point de l'espace 1. Nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi\sigma,$$
$$\Delta V = -4\pi\rho$$

et l'égalité (20) deviendra

$$\int_1 \left\| \mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} \right\| dv = \mathbf{S}\, \mathfrak{V} \sigma \, dS + \int_1 \mathfrak{V} \rho \, dv. \tag{21}$$

Si l'on observe que l'on a

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{S}\, V \sigma \, dS + \frac{\varepsilon}{2} \int_1 V \rho \, dv, \tag{22}$$

on voit qu'en vertu des égalités (21) et (22), l'expression (8) du potentiel thermodynamique interne pourra s'écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{F} = {} & E(\Upsilon - T\Sigma) + \sum \Theta q + \frac{\varepsilon}{2} \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv \\ & + \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots) \, dv + \frac{\varepsilon}{2} \int (V + 2\mathfrak{V}) \rho \, dv \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{S} (V + 2\mathfrak{V}) \sigma \, dS \end{aligned} \right. \tag{23}$$

ou, abréviativement,

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{F} = {} & E(\Upsilon - T\Sigma) + \sum \left[\Theta + \frac{\varepsilon}{2} (V + 2\mathfrak{V}) \right] q \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv + \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots) \, dv. \end{aligned} \right. \tag{23 bis}$$

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES CORPS DIÉLECTRIQUES.

§ 1. — Équilibre électrique sur les diélectriques mauvais conducteurs.

Un diélectrique est dit *mauvais conducteur* si toute charge électrique placée en un point de ce corps est assujettie à y demeurer indéfiniment. Cette invariabilité des charges électriques n'empêche d'ailleurs nullement l'état de polarisation de ce diélectrique d'être variable.

Un diélectrique est dit *parfaitement doux* s'il a, à chaque instant, un état de polarisation qui fasse prendre la plus petite valeur possible au potentiel thermodynamique interne du système qui renferme ce diélectrique.

Il peut exister des diélectriques qui ne soient pas parfaitement doux, comme il existe des corps magnétiques qui ne sont pas parfaitement doux. Ces corps seront dits *diélectriques doués de force coercitive*.

Proposons-nous de rechercher quel est l'état de polarisation d'un diélectrique mauvais conducteur et parfaitement doux soumis à l'action de corps électrisés et doués de polarisation diélectrique.

Supposons, pour ne point trop compliquer notre étude, qu'il s'agisse d'un corps isotrope que nous désignerons par l'indice 1.

Le potentiel thermodynamique interne du système se compose de termes qui varient avec l'état de polarisation du corps 1 et d'autres termes qui sont indépendants de l'état de polarisation de ce corps. Si l'on efface certains de ces derniers, ce potentiel aura pour expression, d'après les égalités (11) et (16) du Chapitre précédent,

$$\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int \Pi(V + \mathfrak{V})\, dv + \int_1 \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\, dv,$$

la première intégrale s'étendant à l'espace tout entier, et la seconde au volume du corps 1.

Supposons la quantité $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ *positive;* nous verrons tout à l'heure qu'il en est forcément ainsi pour tous les diélectriques. Alors la quantité $\mathfrak{F}$ sera assurément positive pour tous les états de polarisation du corps 1; l'ensemble des valeurs que prend la quantité $\mathfrak{F}$ pour les divers états de polarisation du corps 1 forme donc un ensemble de valeurs limité inférieurement; si, par analogie avec ce qu'a fait Lejeune-Dirichlet pour démontrer le principe auquel on a donné son nom, on admet que la quantité $\mathfrak{F}$ présente un minimum, on arrivera à conclure que :

Sur le diélectrique 1, *soumis à l'action d'autres corps électrisés et polarisés, il existe au moins un état de polarisation correspondant à un équilibre.*

Cherchons les lois de cet état de polarisation.

Pour cela, reprenons l'expression du potentiel thermodynamique interne du système donnée par les égalités (8) et (11) du Chapitre I :

$$\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q + \varepsilon \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right\| dv$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2} \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\, dv.$$

Supposons que, en tout point du corps 1, les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'induction éprouvent des variations $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, et égalons à o la variation qui en résulte pour $\delta\mathfrak{F}$.

L'ensemble de termes

$$\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \sum \Theta q$$

ne subira aucune variation.

Nous aurons ensuite

$$\delta \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right\| dv = \int_1 \left\| \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \delta\mathcal{A} \right\| dv,$$

$$\delta \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right\| dv = 2 \int_1 \left\| \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \delta\mathcal{A} \right\| dv,$$

$$\delta\mathfrak{M} = \frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}} \delta\mathcal{A} + \frac{\mathcal{B}}{\mathfrak{M}} \delta\mathcal{B} + \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{M}} \delta\mathcal{C},$$

$$\delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\, dv = \int_1 \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{d\mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{d\mathfrak{M}} (\mathcal{A}\, \delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\, \delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\, \delta\mathcal{C})\, dv.$$

On a donc

$$\delta\mathcal{F} = \int_1 \left\| \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{V}+\mathfrak{V}) + \frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}} \frac{d\mathcal{F}(\mathfrak{M})}{d\mathfrak{M}} \right] \delta\mathcal{A} \right\| dv.$$

Cette quantité doit être égale à o quelles que soient les variations arbitraires $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$. Si donc on pose

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{F}(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}}{\dfrac{d\mathcal{F}(\mathfrak{M})}{d\mathfrak{M}}},$$

on voit que l'on devra avoir, en tout point du corps 1,

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -\varepsilon\,\mathrm{F}(\mathfrak{M})\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{V}+\mathfrak{V}), \\ \mathcal{B} = -\varepsilon\,\mathrm{F}(\mathfrak{M})\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{V}+\mathfrak{V}), \\ \mathcal{C} = -\varepsilon\,\mathrm{F}(\mathfrak{M})\dfrac{\partial}{\partial z}(\mathrm{V}+\mathfrak{V}). \end{cases}$$

Telles sont les égalités qui définissent l'état de polarisation d'un diélectrique parfaitement doux. Ces égalités sont analogues à celles qui définissent l'état d'aimantation d'un corps parfaitement doux. Elles peuvent se traiter de la même manière.

En reprenant les démonstrations données au Livre IX, Chapitre VI, on voit que, *si la fonction* $\mathrm{F}(\mathfrak{M})$ *était négative, l'équilibre défini par les équations* (2) *serait instable.* La fonction $\mathrm{F}(\mathfrak{M})$ est donc forcément positive.

Dès lors, comme, d'après l'équation (1), on a

$$\text{(3)} \qquad \mathcal{F}(\mathfrak{M}) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})}\, d\mathfrak{M},$$

on voit que la fonction $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ est, elle aussi, positive pour tous les diélectriques.

En reproduisant les démonstrations données au Livre IX, Chapitre III, on arriverait à la conclusion suivante :

Si la quantité $\mathrm{F}(\mathfrak{M})$ *décroît lorsque* $\mathfrak{M}$ *augmente, demeure indépendante de* $\mathfrak{M}$, *ou croît faiblement avec* $\mathfrak{M}$, *l'état de polarisation défini par les égalités* (2) *est unique, et il correspond à un équilibre stable.*

Prenons un diélectrique soustrait à l'action de tout corps élec-

trisé et ne portant lui-même aucune charge électrique. Les équations d'équilibre seront évidemment vérifiées si l'on suppose la polarisation nulle en tout point du diélectrique. Or un seul état d'équilibre est possible sur ce diélectrique. Donc, *lorsqu'un diélectrique parfaitement doux est placé hors d'un champ électrique, il ne présente aucune polarisation.*

La classique expérience de la bouteille de Leyde démontable, due à Franklin, montre que le verre, polarisé dans un champ électrique, peut demeurer polarisé lorsqu'on le place hors de ce champ. Matteucci a mis en évidence la *polarisation résiduelle* du blanc de baleine et des lames de mica. Cette polarisation résiduelle, analogue à l'aimantation résiduelle d'un morceau de fer soustrait à l'action d'un champ magnétique, ne peut s'expliquer qu'en attribuant une force coercitive aux diélectriques étudiés.

§ 2. — Du pouvoir inducteur spécifique.

La fonction $F(\mathfrak{M})$ joue, dans l'étude des diélectriques, le même rôle que la fonction magnétisante dans l'étude des aimants. Nous lui donnerons le nom de *fonction polarisante.*

Dans l'étude du magnétisme, il est fait grand usage de l'approximation de Poisson qui consiste à regarder la fonction magnétisante comme indépendante de l'intensité d'aimantation ; de même, ici, il y a intérêt à faire l'approximation qui consiste à regarder la fonction polarisante comme indépendante de l'intensité de polarisation, et à la remplacer par un *coefficient de polarisation constant k.* Les équations (2) deviennent alors

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -\varepsilon k \dfrac{\partial}{\partial x}(V + \mathfrak{V}), \\ \mathcal{B} = -\varepsilon k \dfrac{\partial}{\partial y}(V + \mathfrak{V}), \\ \mathcal{C} = -\varepsilon k \dfrac{\partial}{\partial z}(V + \mathfrak{V}). \end{cases}$$

On donne le nom de *pouvoir inducteur spécifique* à la quantité D définie par l'égalité

$$(5)\qquad D = 1 + 4\pi\varepsilon k.$$

C'est l'analogue de la quantité à laquelle Sir W. Thomson a donné, en Magnétisme, le nom de *perméabilité magnétique*.

§ 3. — Équilibre électrique sur un corps conducteur placé en présence de diélectriques.

Imaginons maintenant un système renfermant un corps conducteur, c'est-à-dire un corps sur lequel les charges électriques sont susceptibles de varier. Ce corps peut, d'ailleurs, présenter une polarisation diélectrique. Cherchons à quelle condition l'équilibre électrique sera établi sur ce corps.

Imaginons que l'on modifie la distribution sur ce corps sans changer son état ni sa polarisation diélectrique. D'après l'égalité (23 *bis*) du Chapitre précédent, les seuls termes variables du potentiel thermodynamique interne du système sont les termes

$$\sum\left[\Theta+\frac{\varepsilon}{2}(\mathrm{V}+2\mathfrak{V})\right]q.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\delta\sum\Theta q=\sum\Theta\,\delta q,$$

$$\delta\varepsilon\sum\mathfrak{V}q=\varepsilon\sum\mathfrak{V}\,\delta q;$$

enfin un calcul souvent fait nous donne

$$\frac{\varepsilon}{2}\delta\sum\mathrm{V}q=\varepsilon\sum\mathrm{V}\,\delta q.$$

On a donc

(5) $$\delta\mathcal{F}=\sum[\varepsilon(\mathrm{V}+\mathfrak{V})+\Theta]\,\delta q.$$

Cette quantité doit être égale à o, mais non pas quelles que soient les quantités δq. En effet, la variation imposée au système doit laisser constante la charge électrique du conducteur. On doit donc avoir

$$\sum\delta q=0.$$

Dès lors, d'après un théorème connu du calcul des variations, il

doit exister une constante C telle que la quantité

$$\sum [\varepsilon(V + \mathfrak{V}) + \Theta + C]\,\delta q$$

soit égale à o quelles que soient les quantités δq. En d'autres termes, *pour que l'équilibre électrique soit établi sur un corps conducteur, il faudra que l'on ait, en tous les points de ce corps,*

$$\varepsilon(V + \mathfrak{V}) + \Theta = \text{const.} \tag{6}$$

Si le corps est à la fois un corps conducteur et un diélectrique parfaitement doux, l'équilibre ne sera établi sur ce corps que si les conditions (2) et (6) y sont à la fois satisfaites.

Considérons un système formé :

1° D'un ou de plusieurs corps 1, qui sont à la fois bons conducteurs et diélectriques parfaitement doux;

2° D'un ou de plusieurs corps 2, qui sont diélectriques parfaitement doux, mais parfaitement mauvais conducteurs;

3° D'un ou de plusieurs corps 3, dont l'état d'électrisation et l'état de polarisation sont invariables.

On démontrera sans peine, en suivant les méthodes que nous avons constamment employées dans l'étude de l'électricité et du magnétisme, que, sur un semblable système, un seul état d'équilibre est possible et que c'est un état d'équilibre stable.

Prenons un corps à la fois diélectrique parfaitement doux et bon conducteur. Les conditions (2) et (6) seront, nous l'avons dit, à la fois vérifiées pour ce corps. Or, d'après la condition (6), on a

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(V + \mathfrak{V}) = \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}(V + \mathfrak{V}) = \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}(V + \mathfrak{V}) = \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Les égalités (2) deviennent donc

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= F(\mathfrak{M}) \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \mathcal{B} &= F(\mathfrak{M}) \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \mathcal{C} &= F(\mathfrak{M}) \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Dans le cas où le corps est homogène, ces égalités se réduisent à

$$(8) \qquad \mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{B} = 0, \qquad \mathcal{C} = 0.$$

Ainsi, *dans un corps homogène qui est à la fois bon conducteur et diélectrique parfaitement doux, il ne subsiste aucune polarisation diélectrique au moment de l'équilibre.*

On a, à l'intérieur de ce corps, d'après l'égalité (6),

$$\Delta(V + \mathfrak{V}) = 0.$$

Mais, comme il n'y a, à l'intérieur de ce corps, aucune polarisation diélectrique, on a, en tout point intérieur à ce corps,

$$\Delta\mathfrak{V} = 0.$$

On a donc aussi

$$\Delta V = 0.$$

Lorsqu'un corps à la fois bon conducteur et diélectrique parfaitement doux est en équilibre, il n'y a pas d'électricité libre à son intérieur.

On voit donc que tous les résultats établis au Livre II pour la distribution électrique sur les corps homogènes qui sont bons conducteurs demeurent exacts, même lorsque l'on admet la possibilité d'une polarisation diélectrique, pour les corps à la fois bons conducteurs et diélectriques parfaitement doux. Lorsque nous complétons la théorie des phénomènes électriques en introduisant la polarisation diélectrique dans nos raisonnements, nous ne perdons aucun des résultats déjà acquis.

§ 4. — Propriétés d'un condensateur à lame isolante diélectrique. Mesure du pouvoir inducteur spécifique.

Imaginons un condensateur formé de la manière suivante : une surface fermée S_1 (*fig.* 25) entoure un corps bon conducteur et diélectrique parfaitement doux 1, formant armature interne.

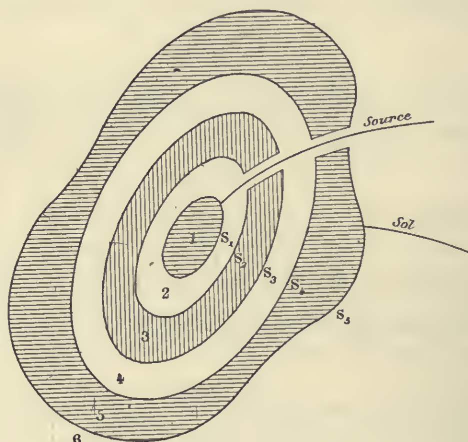
A l'extérieur de la surface S_1, un espace 2 est vide; il est limité par une surface fermée S_2, enveloppant S_1.

Entre la surface S_2 et une surface fermée S_3 qui l'enveloppe est un espace 3 rempli par un diélectrique parfaitement doux, mais parfaitement mauvais conducteur.

A la surface S_3 succède un nouvel espace vide 4 que limite extérieurement une surface fermée S_4 enveloppant la surface S_3.

Entre la surface S_4 et une surface fermée S_5 qui l'enveloppe se trouve un espace 5 rempli par la même substance que l'espace 1.

Fig. 25.



Enfin l'espace illimité 6, extérieur à la surface S_5, est un espace vide.

Le corps 1 est mis en communication par un fil de même substance avec un corps très éloigné, également de même substance, maintenu au niveau potentiel U (source).

Le corps 5 est mis en communication par un fil de même substance avec un corps très éloigné, également de même substance, maintenu au niveau potentiel o (sol).

Le corps 3 ne renferme aucune charge électrique. De plus, nous admettrons qu'il a un coefficient de polarisation diélectrique k indépendant de l'intensité de l'induction diélectrique.

Nous nous proposons de déterminer l'état d'électrisation et de polarisation d'un semblable condensateur.

Cette détermination se ramène évidemment à celle des deux fonctions V et $\mathfrak{V}$.

Ces deux fonctions sont continues dans tout l'espace et égales à o à l'infini à la manière d'une fonction potentielle.

La fonction V admet, dans tout l'espace, des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies et continues sauf sur les surfaces S_1 et S_4 ; il est aisé, en effet, de voir que la surface S_5 n'est pas électrisée; il suffit, pour cela, de remplacer le diélectrique polarisé par une couche superficielle équivalente et d'appliquer les théorèmes connus sur l'induction électrostatique des conducteurs creux. Dans chacune des régions 1, 2, 3, 4, 5, 6, la fonction V est harmonique.

La fonction $\mathfrak{V}$ est harmonique dans chacune des régions 1, 2, 4, 5, 6. Elle l'est aussi dans la région 3. Dans cette région, en effet, les égalités (3) sont satisfaites. Si l'on différentie la première de ces égalités par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et si on les ajoute membre à membre les résultats obtenus, on trouve

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} = - \varepsilon k \Delta(V + \mathfrak{V}).$$

Si l'on observe que l'on a, dans cette région,

$$\Delta V = 0,$$

$$\Delta \mathfrak{V} = 4\pi \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right),$$

on voit que l'on a

$$(1 + 4\pi\varepsilon k)\, \Delta \mathfrak{V} = 0,$$

ou bien, puisque k ne peut être négatif,

$$\Delta \mathfrak{V} = 0.$$

A l'intérieur du conducteur 1, d'après ce que nous avons dit au paragraphe précédent, V aura une valeur constante V_1 et $\mathfrak{V}$ une autre valeur constante $\mathfrak{V}_1$. De plus, comme il doit y avoir équilibre entre le conducteur 1 et la source, nous aurons

$$V_1 + \mathfrak{V}_1 = U. \tag{9}$$

Dans l'espace 2, $\mathfrak{V}$ continuera à avoir la valeur constante $\mathfrak{V}_1$, car ses dérivées premières n'éprouvent pas de discontinuité à la traversée de la surface S_1. Au contraire, V aura une valeur variable.

Dans l'espace 5, V et $\mathfrak{V}$ auront des valeurs constantes. Comme les dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions sont continues sur la surface S_5, ces fonctions auront encore les mêmes

valeurs constantes dans l'espace 6. Or, chacune d'elles étant égale à o à l'infini, on voit que, *dans les espaces* 5 *et* 6, on a

$$V = 0, \qquad \mathfrak{V} = 0.$$

La fonction $\mathfrak{V}$ a ses dérivées partielles du premier ordre continues à la traversée de la surface S_4. Donc, *dans l'espace* 4, on a encore

$$\mathfrak{V} = 0,$$

tandis que la fonction V varie.

Enfin, dans *l'espace* 3, les deux fonctions V et $\mathfrak{V}$ sont variables.

En un point de la surface S_2, on a

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_2} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_3} = 4\pi \| \mathcal{A} \cos(N_3, x) \|;$$

on a aussi

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_2} = 0$$

et

$$\| \mathcal{A} \cos(N_3, x) \| = -\pi\varepsilon k \left(\frac{\partial V}{\partial N_3} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_3} \right).$$

L'égalité précédente devient donc

$$(1 + 4\pi\varepsilon k) \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_3} + 4\pi\varepsilon k \frac{\partial V}{\partial N_3} = 0. \tag{10}$$

Une égalité analogue a lieu pour tous les points de la surface S_4.

Il nous est maintenant facile d'indiquer la marche à suivre pour résoudre le problème proposé.

Soit v une fonction égale à 1 dans l'espace 1 et sur la surface S_1; à o dans les régions 5 et 6 et sur la surface S_4; harmonique dans les régions 2, 3, 4.

Soit w une fonction égale à 1 dans les régions 1 et 2 et sur la surface S_2; à o dans les régions 4, 5 et 6 et sur la surface S_3; harmonique dans la région 3.

La détermination de ces deux fonctions s'obtient en résolvant deux fois le problème de Lejeune-Dirichlet.

Quelles que soient les deux constantes $\mathfrak{V}_1$ et V_1, les deux formules

$$V = V_1 v, \qquad \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 w \tag{11}$$

donnent la forme générale des fonctions satisfaisant à toutes les conditions que nous venons d'énumérer, sauf aux conditions exprimées par les égalités (9) et (10). Si l'on observe d'ailleurs que le problème doit admettre une et une seule solution, on voit que cette solution sera fournie par les égalités (11), pourvu que l'on détermine les constantes V_1 et $\mathfrak{V}_1$ de la manière suivante :

1° On a

$$V_1 + \mathfrak{V}_1 = U; \tag{9 bis}$$

2° Prenant un point P soit sur la surface S_2, soit sur la surface S_3, on a

$$(1 + 4\pi\varepsilon k)\mathfrak{V}_1 \left(\frac{\partial w}{\partial N_3}\right)_P + 4\pi\varepsilon k V_1 \left(\frac{\partial v}{\partial N_3}\right)_P = 0. \tag{10 bis}$$

Un cas intéressant est celui où le diélectrique remplit complètement l'intervalle des deux armatures. On a alors, évidemment,

$$v = w.$$

Les égalités (9 *bis*) et (10 *bis*) donnent

$$V_1 = (1 + 4\pi\varepsilon k)U, \qquad \mathfrak{V}_1 = -4\pi\varepsilon k U.$$

On a donc, pour expression de la charge du conducteur 1,

$$Q = -\frac{1}{4\pi} \mathrm{S} \frac{\partial V}{\partial N_e} dS_1 = -\frac{1}{4\pi}(1 + 4\pi\varepsilon k) U \,\mathrm{S} \frac{\partial v}{\partial N_e} dS_1.$$

La *capacité* du condensateur, c'est-à-dire la quantité $\frac{Q}{\varepsilon U}$, a pour valeur

$$C = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}(1 + 4\pi\varepsilon k) \,\mathrm{S} \frac{\partial v}{\partial N_i} dS_1.$$

Si le diélectrique est remplacé par le vide, ce qui revient à remplacer k par 0, on obtient un nouveau condensateur dont la capacité, inférieure à la précédente, a pour valeur

$$\Gamma = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathrm{S} \frac{\partial v}{\partial N_i} dS_1.$$

On a donc

$$\frac{C}{\Gamma} = (1 + 4\pi\varepsilon k) = D,$$

D étant le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique.

La solution générale se simplifie dans le cas où les surfaces S_2,

S_3, S_4 sont des surfaces de niveau extérieures du conducteur 1. Soit W une fonction harmonique dans tout l'espace extérieur à la surface S_1, égale à o à l'infini et à 1 sur la surface S_1; soient α_2, α_3, α_4 les valeurs de cette fonction sur les surfaces S_2, S_3, S_4. Il est facile de voir que les deux fonctions désignées dans ce qui précède par v et w sont ici définies par les égalités suivantes :

$$(12)\quad \begin{cases} v = \dfrac{W-\alpha_4}{1-\alpha_4} & \text{(dans les régions 2, 3, 4} \\ w = \dfrac{W-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_3} & \text{(dans la région 3).} \end{cases}$$

En un point quelconque P de l'une des surfaces S_2 ou S_3, on a

$$\frac{\partial v}{\partial N_3} = \frac{1}{1-\alpha_4}\frac{\partial W}{\partial N_3},$$

$$\frac{\partial w}{\partial N_3} = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_3}\frac{\partial W}{\partial N_3}.$$

L'égalité (10 *bis*) devient donc

$$\frac{1+4\pi\varepsilon k}{\alpha_2-\alpha_3}\mathfrak{V}_1 + \frac{4\pi\varepsilon k}{1-\alpha_4}V_1 = 0.$$

Jointe à l'égalité (9 *bis*), cette égalité donne

$$(13)\quad \begin{cases} V_1 = \dfrac{(1+4\pi\varepsilon k)(1-\alpha_4)}{(1+4\pi\varepsilon k)(1-\alpha_4)-4\pi\varepsilon k(\alpha_2-\alpha_3)}U, \\ \mathfrak{V}_1 = -\dfrac{4\pi\varepsilon k(\alpha_2-\alpha_3)}{(1+4\pi\varepsilon k)(1-\alpha_4)-4\pi\varepsilon k(\alpha_2-\alpha_3)}U. \end{cases}$$

Les égalités (11), (12) et (13) déterminent les deux fonctions V et $\mathfrak{V}$, et, par conséquent, résolvent le problème que nous nous sommes posé.

Cherchons la charge du conducteur 1.

Cette charge Q aura pour valeur

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{S}\frac{\partial V}{\partial N_2}dS_1,$$

ou bien, en vertu des égalités (11) et (12),

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\frac{V_1}{1-\alpha_4}\mathbf{S}\frac{\partial W}{\partial N_2}dS_1,$$

ou enfin, en vertu des égalités (13),

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\frac{1+4\pi\varepsilon k}{(1+4\pi\varepsilon k)(1-\alpha_4)-4\pi\varepsilon k(\alpha_2-\alpha_3)}\, U \, S \frac{\partial W}{\partial N_2}\, dS_1.$$

Comme

$$S \frac{\partial W}{\partial N_2}\, dS_1 = -4\pi,$$

l'égalité précédente devient

$$Q = \frac{1+4\pi\varepsilon k}{(1+4\pi\varepsilon k)(1-\alpha_4)-4\pi\varepsilon k(\alpha_2-\alpha_3)}\, U.$$

La *capacité* du condensateur est le rapport de cette charge Q au produit εU de la constante des lois de Coulomb par le niveau potentiel de la source. Si C désigne cette capacité, on voit que l'on peut écrire

$$(14) \qquad C = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1+4\pi\varepsilon k}{(1+4\pi\varepsilon k)(1-\alpha_4)-4\pi\varepsilon k(\alpha_2-\alpha_3)}.$$

Faisons décroître au delà de toute limite l'épaisseur du diélectrique; cette capacité tendra vers une certaine limite Γ qui s'obtiendra en faisant dans la formule (14), $\alpha_2 = \alpha_3$. On aura donc

$$\Gamma = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1-\alpha_4}.$$

C'est la capacité du condensateur privé de lame diélectrique.

La formule (14) peut alors s'écrire

$$(15) \qquad C = \frac{(1+4\pi\varepsilon k)(1-\alpha_4)}{(1+4\pi\varepsilon k)(1-\alpha_4)-4\pi\varepsilon k(\alpha_2-\alpha_3)}\, \Gamma.$$

Cette formule montre comment la capacité du condensateur varie avec l'épaisseur de la lame diélectrique. Si la lame diélectrique, d'abord supprimée, croît jusqu'à remplir entièrement l'intervalle des deux armatures, la quantité $(\alpha_2-\alpha_3)$ croît depuis 0 jusqu'à $(1-\alpha_4)$ et la capacité du condensateur croît depuis Γ jusqu'à la limite

$$C' = (1+4\pi\varepsilon k)\,\Gamma.$$

Cavendish avait découvert, dès 1771, que l'introduction d'un isolant solide entre les deux plateaux d'un condensateur augmentait la capacité de ce condensateur. Faraday, qui ignorait ces recherches, publiées seulement en 1879 par Maxwell, retrouva de son côté le même fait en 1837.

La formule (15) permet de déterminer la constante k et, par conséquent, le pouvoir inducteur spécifique

$$D = (1 + 4\pi\varepsilon k).$$

Prenons, en effet, deux condensateurs identiques, dont l'un renferme une lame diélectrique, tandis que l'autre n'en renferme pas. Le rapport de leur capacité peut être mesuré par diverses méthodes. Or ce rapport aura pour valeur, d'après la formule (15),

$$(16) \qquad \frac{C}{\Gamma} = \frac{(1 + 4\pi\varepsilon k)(1 - \alpha_4)}{(1 + 4\pi\varepsilon k)(1 - \alpha_4) - 4\pi\varepsilon k(\alpha_2 - \alpha_3)}.$$

La mesure de $\frac{C}{\Gamma}$ fera donc connaître k si l'on connaît α_2, α_3, α_4.

Supposons que les surfaces S_1, S_2, S_3, S_4 soient des sphères concentriques de rayons R_1, R_2, R_3, R_4. Soit r la distance d'un point de l'espace au centre commun de ces sphères. On aura

$$W = \frac{R_1}{r},$$

$$\alpha_2 = \frac{R_1}{R_2}, \qquad \alpha_3 = \frac{R_1}{R_3}, \qquad \alpha_4 = \frac{R_1}{R_4}$$

et l'égalité (16) deviendra

$$(17) \qquad \frac{C}{\Gamma} = \frac{(1 + 4\pi\varepsilon k)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4}\right)}{(1 + 4\pi\varepsilon k)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4}\right) - 4\pi\varepsilon k\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)}.$$

Par cette égalité, on peut déterminer le pouvoir inducteur spécifique.

Si, comme Cavendish ou Faraday, on emploie deux condensateurs identiques dont l'un est dépourvu de lame diélectrique, tandis que, dans l'autre, le diélectrique remplit l'intervalle des deux armatures, on aura, *quelle que soit leur forme,* ainsi que nous l'avons vu plus haut,

$$v = w$$

et alors, comme nous l'avons vu,

$$(18) \qquad \frac{C}{\Gamma} = (1 + 4\pi\varepsilon k) = D.$$

§ 5. — Causes d'erreur. — Expériences de Gaugain.

La relation (17) permet, nous l'avons dit, de déterminer le pouvoir inducteur spécifique des corps solides; la relation (18) permet de déterminer le pouvoir inducteur spécifique non seulement des solides, mais encore des liquides et des gaz.

L'établissement de ces relations est subordonné à certaines conditions qu'il n'est pas toujours facile de réaliser dans la pratique, en sorte que la mesure des pouvoirs inducteurs spécifiques présente de grandes difficultés.

Voyons quelles sont ces causes d'erreur :

1° La théorie précédente suppose le diélectrique parfaitement mauvais conducteur. Or, tous les corps sont plus ou moins conducteurs. Dès lors, l'état que nous venons de décrire ne sera pas, pour le système, un état d'équilibre. Dans l'état d'équilibre, la distribution électrique sur le système sera indépendante de la nature du diélectrique; elle s'obtiendra en appliquant au diélectrique les lois de la distribution sur un corps conducteur.

Si donc on charge un condensateur dont la lame diélectrique soit médiocrement conductrice, la distribution électrique et diélectrique sera, au début, définie par les formules précédentes; puis cet état se modifiera peu à peu et, au bout d'un temps plus ou moins long selon la nature du diélectrique, toute polarisation aura disparu; la distribution sur le système sera la même que si l'on remplaçait le diélectrique par un conducteur non polarisable.

Ces considérations rendent compte des observations de Gaugain [1].

Reprenons le condensateur représenté par la *fig.* 25; imaginons encore que les surfaces S_2, S_3, S_4 soient des surfaces de niveau du conducteur 1; mais supposons de plus que l'espace 3 soit rempli par un corps bon conducteur. On verra sans peine que la fonction V doit être continue dans tout l'espace, constante et égale à U à l'intérieur du corps 1, harmonique dans l'espace 2,

---

[1] GAUGAIN, *Mémoire sur la conductibilité électrique et la capacité inductive des corps isolants* (*Annales de Chimie et de Physique,* 4e série, t. II, p. 276; 1864).

constante dans l'espace 3, harmonique dans la région 4, égale à o dans les régions 5 et 6. De plus, la charge totale du conducteur 3 est supposée égale à o.

Ces conditions, on le sait, déterminent une et une seule fonction V.

Quelle que soit la constante K, on satisfait à toutes ces conditions, sauf à la dernière, en posant

Dans la région 1............ $V = U$

Dans la région 2.... ...... $V = \frac{U - K}{1 - \alpha_2} W - \frac{U\alpha_2 - K}{1 - \alpha_2}$

Dans la région 3............ $V = K$

Dans la région 4............ $V = \frac{K}{\alpha_3 - \alpha_4}(W - \alpha_4)$

Dans les régions 5 et 6...... $V = 0$

Ces formules détermineront la fonction V si l'on choisit la constante K de manière que la charge totale du conducteur 3 soit égale à o.

Or la charge de la surface S_2 est

$$Q_2 = -\frac{1}{4\pi} \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial V}{\partial N_2} dS_2 = \frac{K - U}{4\pi(1 - \alpha_2)} \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial W}{\partial N_2} dS_2.$$

La charge de la surface S_3 est

$$Q_3 = -\frac{1}{4\pi} \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial V}{\partial N_4} dS_4 = -\frac{K}{4\pi(\alpha_3 - \alpha_4)} \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial W}{\partial N_4} dS_4.$$

Si l'on remarque que l'on a

$$\mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial W}{\partial N_2} dS_2 = -\mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial W}{\partial N_4} dS_4 = 4\pi,$$

on voit que l'égalité

$$Q_2 + Q_3 = 0$$

devient

$$\frac{K - U}{1 - \alpha_2} + \frac{K}{\alpha_3 - \alpha_4} = 0$$

ou bien

$$K = \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4} U.$$

On a alors

$$(19)\quad \begin{cases} \text{Dans la région 1.......} & V = U \\ \text{Dans la région 2.... ..} & V = \dfrac{U}{1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4}(W-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4) \\ \text{Dans la région 3.......} & V = U\,\dfrac{\alpha_3-\alpha_4}{1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4} \\ \text{Dans la région 4.......} & V = U\,\dfrac{1}{1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4}(W-\alpha_4) \\ \text{Dans les régions 5 et 6.} & V = 0 \end{cases}$$

Ces formules (19) déterminent la distribution électrique sur le condensateur à lame conductrice; elles déterminent aussi la distribution limite qui s'établit au bout d'un temps plus ou moins long sur le condensateur à lame diélectrique.

La charge du collecteur est

$$Q_1 = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{S}\frac{\partial V}{\partial N_2}dS_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{U}{1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4}\mathrm{S}\frac{\partial W}{\partial N_2}dS_1$$

et, comme

$$\mathrm{S}\frac{\partial W}{\partial N_2}dS_1 = -4\pi,$$

$$(20)\qquad Q_1 = \frac{U}{1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4}.$$

Dans les expériences de Gaugain, les surfaces S_1, S_2, S_3, S_4 étaient des plans parallèles; d'une expérience à l'autre, on faisait varier l'épaisseur de la lame diélectrique, c'est-à-dire la distance des deux plans S_2, S_3. Mais la distance des plans S_1, S_2, d'une part, et la distance des plans S_3, S_4, d'autre part, étaient, par l'interposition de pastilles de gomme laque, maintenues les mêmes dans toutes les expériences. Dès lors, dans toutes les expériences, les deux binômes $(1-\alpha_2)$ et $(\alpha_3-\alpha_4)$ reprenaient les mêmes valeurs.

La charge limite Q_1 devait, dans ces conditions, être indépendante de l'épaisseur du diélectrique et de sa nature; elle devait être identique à la charge immédiatement obtenue en remplaçant le mauvais conducteur par un bon conducteur.

Les résultats obtenus par Gaugain sont conformes à ces indications de la théorie; voici ces résultats : la charge du collecteur est

mesurée par le nombre d'étincelles obtenues en le déchargeant au travers de l'électromètre-jauge.

Disque interposé.	Temps.	Charge du collecteur.
Zinc	Au bout de quelques instants	21
Acide stéarique (épaisseur 6^{mm})	Au bout de quelques instants	13
	Après une charge de 6 minutes	20
	Après une nouvelle charge de 10^m	21
Acide stéarique (épaisseur 17^{mm})	Après une charge de quelques instants	9
	Après une nouvelle charge de 5^m	14
	» » 11^m	14
	» » 20^m	16
	» » $2^h 15^m$	19
	» » $2^h 40^m$	20
Gutta-percha (épaisseur 6^{mm})	Après une charge de quelques instants	15
	Après une nouvelle charge de 5^m	17
	» » 10^m	21
	» » 20^m	22
Gomme laque (épaisseur 6^{mm})	Après une charge de quelques instants	14
	Après une nouvelle charge de 5^m	20
	» » 20^m	22
Soufre (épaisseur 6^{mm})	Après une charge de quelques instants	15
	Après une charge de $7^h 30^m$	21

2° La difficulté que nous venons de signaler n'est pas la seule que présente la détermination des pouvoirs inducteurs spécifiques. Si, comme dans les expériences de Cavendish et de Faraday, le diélectrique est en contact avec les armatures du condensateur, et si, de plus, le diélectrique n'est pas parfaitement isolant, il y aura pénétration d'électricité dans le diélectrique, contrairement aux conditions supposées par la théorie précédente.

3° Enfin la théorie précédente suppose le diélectrique parfaitement doux, ce qui, comme nous l'avons vu, n'est loin d'être exact pour tous.

§ 6. — Courant permanent dans un diélectrique.

Si un diélectrique n'est pas parfaitement mauvais conducteur, il peut être le siège de courants électriques. Quelles seront les lois

auxquelles obéiront de semblables courants parvenus au régime permanent?

Nous fonderons l'établissement de ces lois sur l'hypothèse qui nous a constamment servi, aux Livres V et VI, dans l'étude de ce genre de questions.

Nous calculerons l'expression du potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ qu'aurait le système si, arrêtant à un instant donné tous les courants, on conservait au système son état d'électrisation et de polarisation.

A une charge dq placée en un point M, nous donnerons une translation infiniment petite quelconque (δx, δy, δz). La quantité $\mathcal{F}$ subira une variation $\delta\mathcal{F}$. Nous *admettrons* que l'on a, quels que soient δx, δy, δz,

$$\delta\mathcal{F} = -\mathfrak{R}(u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z)\,dq,$$

u, v, w étant les composantes du flux électrique au point M et $\mathfrak{R}$ la résistance électrique spécifique en ce point.

Appliquons cette hypothèse.

D'après l'expression (23 *bis*) du potentiel thermodynamique interne, nous aurons

$$\delta\mathcal{F} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}[\varepsilon(V + \mathfrak{V}) + \Theta]\,\delta x \\ & + \frac{\partial}{\partial y}[\varepsilon(V + \mathfrak{V}) + \Theta]\,\delta y \\ & + \frac{\partial}{\partial z}[\varepsilon(V + \mathfrak{V}) + \Theta]\,\delta z \end{aligned} \right\} dq.$$

Notre hypothèse conduira donc aux égalités suivantes

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}u &= -\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \varepsilon\,\frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial x}, \\ \mathfrak{R}v &= -\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \varepsilon\,\frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial y}, \\ \mathfrak{R}w &= -\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \varepsilon\,\frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

En outre, si le diélectrique est parfaitement doux, les égalités (2) sont satisfaites en tout point.

Bornons-nous à étudier un diélectrique homogène, parfaitement doux, ayant un coefficient de polarisation constant. Dans ces con-

ditions, les égalités (21), jointes à l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

qui exprime que le courant est uniforme, donnent

$$\Delta(\mathrm{V} + \mathfrak{V}) = 0. \tag{22}$$

D'autre part, les égalités (4) donnent

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right) + \varepsilon k\, \Delta(\mathrm{V} + \mathfrak{V}) = 0,$$

ou bien, à cause de l'égalité,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\Delta\mathfrak{V},$$

$$(1 + 4\pi\varepsilon k)\,\Delta\mathfrak{V} + 4\pi\varepsilon k\,\Delta\mathrm{V} = 0. \tag{23}$$

k ne peut jamais être négatif; dès lors, la comparaison des égalités (22) et (23) donne les deux égalités

$$\Delta\mathfrak{V} = 0, \tag{24}$$

$$\Delta\mathrm{V} = 0. \tag{25}$$

L'égalité (24) nous enseigne que, *dans un diélectrique homogène, parfaitement doux, à coefficient de polarisation constant, parcouru par un courant permanent, la polarisation est à la fois solénoïdale et lamellaire simple.*

L'égalité (25) nous enseigne qu'*à l'intérieur de ce diélectrique il n'y a pas d'électricité libre.*

La comparaison des égalités (6) et (21) donne, pour un diélectrique homogène,

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= k\mathfrak{R}u, \\ \mathcal{B} &= k\mathfrak{R}v, \\ \mathcal{C} &= k\mathfrak{R}w. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

D'après ces conditions, *dans un semblable diélectrique, l'intensité de polarisation est, en chaque point, dirigée comme le flux électrique; elle lui est proportionnelle en grandeur; le coefficient de proportionnalité est le produit du coefficient de polarisation diélectrique par la résistance spécifique.*

Les équations que nous venons de donner supposent essentiellement que le régime permanent est établi; elles ne peuvent servir,

du moins sans justification préalable, à étudier l'état variable d'un condensateur à lame diélectrique.

Nous pourrions étendre indéfiniment l'étude des corps diélectriques et reprendre pour eux la plupart des questions que nous avons traitées pour les aimants; nous ne nous y attarderons pas; c'est ainsi que nous laisserons au lecteur le soin d'étendre aux cristaux diélectriques ce que nous avons dit au sujet des cristaux magnétiques (¹).

(¹) *Voir* au sujet des propriétés diélectriques des cristaux : Jacques CURIE, *Recherches sur le pouvoir inducteur spécifique et la conductibilité des corps cristallisés* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6ᵉ série, t. XVII, p. 385; 1889).



CHAPITRE III.

ATTRACTIONS DES CORPS ÉLECTRISÉS PLONGÉS DANS UN MILIEU DIÉLECTRIQUE.

§ 1. — Distribution électrique sur des corps conducteurs plongés dans un milieu diélectrique.

Tout en laissant au lecteur le soin d'étendre aux corps diélectriques les théories que nous avons développées en étudiant les corps magnétiques, il est une question que nous allons examiner ici en détail, parce qu'elle donne lieu à des remarques auxquelles ne prêtait pas l'étude des aimants : nous voulons parler de la recherche des lois auxquelles obéissent les attractions des corps électrisés plongés dans un milieu diélectrique.

Nous avons vu (Livre IX, Chap. VIII et IX) que les propriétés des corps diamagnétiques ne pouvaient s'expliquer qu'en admettant, dans les espaces qui nous semblent vides, l'existence d'un fluide doué de propriétés magnétiques ; les expériences de M. P. Joubin (Livre IX, Chap. VIII) semblent même indiquer que ce fluide est doué de force coercitive.

Si l'on admet l'existence d'un semblable fluide doué de propriétés magnétiques, il est naturel de supposer qu'il puisse être doué aussi de propriétés diélectriques; tous les corps électrisés que nous observons seraient donc plongés dans un milieu polarisable.

Alors se pose la question suivante dont l'importance, grande par elle-même, augmente encore par le rôle qu'elle joue dans la discussion de certaines théories :

Si l'on suppose que les actions mutuelles des corps électrisés plongés dans un milieu isolant idéal, incapable de s'électriser ou de se polariser, soient données par les lois de Coulomb,

quelle perturbation apporte, aux conséquences de ces lois, la présence d'un milieu diélectrique dans lequel ces corps sont censés plongés?

C'est cette question que nous allons examiner dans le présent Chapitre.

Commençons par étudier les lois de la distribution électrique sur des corps conducteurs plongés dans un milieu diélectrique.

Nous désignerons par V la fonction potentielle de la distribution électrique, et par $\mathfrak{V}$ la fonction potentielle de la distribution diélectrique. La condition d'équilibre sur un corps conducteur sera alors

$$(1) \qquad \varepsilon(V + \mathfrak{V}) + \Theta = \text{const.}$$

La densité électrique en un point de la surface de séparation du corps conducteur et du milieu diélectrique a pour valeur

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e}\right).$$

Comme l'égalité (1) donne

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \Theta}{\partial n_i} = 0,$$

la relation précédente peut s'écrire

$$(2) \qquad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n_e} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_i}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial \Theta}{\partial n_i}.$$

D'autre part, en désignant par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'intensité de polarisation, on a, en un point quelconque de la surface de séparation considérée,

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_i} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_e} = 4\pi[\mathcal{A}\cos(n_e, x) + \mathcal{B}\cos(n_e, y) + \mathcal{C}\cos(n_e, z)].$$

Si, dans cette égalité, on remplace $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ par les valeurs que donnent les égalités (2) du Chapitre précédent, on trouve

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_i} + [1 + 4\pi\varepsilon F(\mathcal{M})]\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_e} + 4\pi\varepsilon F(\mathcal{M})\frac{\partial V}{\partial n_e} = 0,$$

en sorte que l'égalité (2) devient

$$(4) \qquad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\left\{[1 + 4\pi\varepsilon F(\mathcal{M})]\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_e} + \frac{\partial V}{\partial n_e}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \Theta}{\partial n_i}\right\}.$$

A l'intérieur du diélectrique, les fonctions $\mathfrak{V}$ et V vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta \mathfrak{V} = 0. \tag{5}$$

Les conditions (1), (3) et (5) déterminent les deux fonctions V et $\mathfrak{V}$ quand on se donne la nature des conducteurs et la charge sur chacun d'eux; on sait qu'alors sont connus l'état d'électrisation du conducteur et l'état de polarisation du milieu diélectrique.

De ces équations générales ne se dégage aucune conclusion intéressante; il n'en est plus de même dans le cas particulier défini par les hypothèses suivantes :

1° On néglige les variations que la quantité Θ présente à l'intérieur de tous les conducteurs, même de ceux qui nous semblent homogènes;

2° On néglige les variations de la fonction $F(\mathfrak{M})$ avec l'intensité de polarisation; on la remplace par une constante k.

Moyennant ces hypothèses, l'égalité (1) devient

$$V + \mathfrak{V} = \text{const.}$$

et l'égalité (4) devient

$$\sigma = -\frac{1 + 4\pi\varepsilon k}{4\pi}\frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial n_e}. \tag{6}$$

Considérons la fonction

$$(1 + 4\pi\varepsilon k)(V + \mathfrak{V}).$$

Cette fonction est constante à l'intérieur des corps conducteurs; d'après les égalités (6), elle vérifie l'équation de Laplace en dehors des corps conducteurs; elle représente donc la fonction potentielle d'une distribution qui serait en équilibre sur les corps conducteurs plongés dans un milieu non électrisable et non polarisable; en un point de la surface de ces conducteurs, la densité aurait pour valeur

$$-\frac{1 + 4\pi\varepsilon k}{4\pi}\frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial n_e},$$

c'est-à-dire σ, d'après l'égalité (6); d'où la conclusion suivante :

Moyennant les restrictions indiquées, l'électricité se distribue sur un système de corps conducteurs plongés dans un milieu diélectrique comme si ce milieu était remplacé par un milieu non polarisable.

Ce théorème s'étend au cas où le milieu renferme un corps diélectrique parfaitement doux, dépourvu de toute charge électrique, et dont le coefficient de polarisation est constant. Dans ce cas, en effet, les fonctions V et $\mathfrak{V}$ vérifient les égalités données dans ce qui précède; de plus, à l'intérieur du corps diélectrique considéré, on a

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta \mathfrak{V} = 0,$$

et, à la surface de ce corps,

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e} = 0,$$

$$(1 + 4\pi\varepsilon k)\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_e} + (1 + 4\pi\varepsilon k')\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_i} + 4\pi\varepsilon k \frac{\partial V}{\partial n_e} + 4\pi\varepsilon k' \frac{\partial V}{\partial n_i} = 0.$$

En vertu de l'avant-dernière égalité, cette dernière peut s'écrire

$$(1 + 4\pi\varepsilon k)\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_e} + \frac{\partial V}{\partial n_e}\right) + (1 + 4\pi\varepsilon k')\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_i}\right) = 0.$$

La fonction $U = (1 + 4\pi\varepsilon k)(V + \mathfrak{V})$ satisfait donc aux conditions suivantes :

Elle est continue dans tout l'espace;

Elle est harmonique à l'intérieur du corps diélectrique et dans l'espace extérieur au corps diélectrique et au corps conducteur;

Elle est constante à l'intérieur du corps conducteur;

Elle vérifie, à la surface de séparation du diélectrique et du milieu, l'équation

$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon k'}{1 + 4\pi\varepsilon k}\frac{\partial U}{\partial n_i} + \frac{\partial U}{\partial n_e} = 0.$$

Considérons une quantité γ définie par l'égalité

$$(7) \qquad 1 + 4\pi\varepsilon\gamma = \frac{1 + 4\pi\varepsilon k'}{1 + 4\pi\varepsilon k}.$$

A l'intérieur du corps diélectrique, imaginons une polarisation dont les composantes aient pour valeur

$$(8) \qquad \begin{cases} A = -\varepsilon\gamma\dfrac{\partial U}{\partial x} = -\varepsilon\gamma(1 + 4\pi\varepsilon k)\dfrac{\partial}{\partial x}(V + \mathfrak{V}), \\ B = -\varepsilon\gamma\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\varepsilon\gamma(1 + 4\pi\varepsilon k)\dfrac{\partial}{\partial y}(V + \mathfrak{V}), \\ C = -\varepsilon\gamma\dfrac{\partial U}{\partial z} = -\varepsilon\gamma(1 + 4\varepsilon\pi k)\dfrac{\partial}{\partial z}(V + \mathfrak{V}); \end{cases}$$

à la surface du corps conducteur, plaçons une distribution dont la densité ait pour valeur

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n_i} = -\frac{1+4\pi\varepsilon k}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_i}(V+\mathfrak{V}).$$

Cette distribution, on le voit aisément, aurait pour fonction potentielle, tant électrique que diélectrique, la fonction U; de plus, elle assurerait l'équilibre du système supposé plongé dans un milieu idéal, non électrisable et non polarisable.

Or la densité de la couche électrique que le corps conducteur porte dans cette distribution est identique à la densité de la couche qu'il porte lorsqu'il est plongé dans le milieu polarisable.

Lorsque le diélectrique est plongé dans le milieu polarisable, il prend en chaque point une polarisation dont les composantes ont pour valeur

$$(9)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -\varepsilon k' \dfrac{\partial}{\partial x}(V+\mathfrak{V}), \\ \mathcal{B} = -\varepsilon k' \dfrac{\partial}{\partial y}(V+\mathfrak{V}), \\ \mathcal{C} = -\varepsilon k' \dfrac{\partial}{\partial z}(V+\mathfrak{V}). \end{cases}$$

Si l'on compare ces égalités (9) aux égalités (8), on trouve

$$A = \frac{\gamma}{k'}(1+4\pi\varepsilon k)\mathcal{A},$$

$$B = \frac{\gamma}{k'}(1+4\pi\varepsilon k)\mathcal{B},$$

$$C = \frac{\gamma}{k'}(1+4\pi\varepsilon k)\mathcal{C},$$

ou bien, en vertu de la relation (7),

$$(10)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \dfrac{k'}{k'-k}A, \\ \mathcal{B} = \dfrac{k'}{k'-k}B, \\ \mathcal{C} = \dfrac{k'}{k'-k}C. \end{cases}$$

On arrive ainsi à la proposition suivante :

Supposons que l'on veuille trouver la distribution des

charges électriques et de la polarisation diélectrique sur un système formé de corps conducteurs et de corps diélectriques parfaitement doux, plongés dans un milieu diélectrique. Nous pouvons supprimer ce milieu diélectrique, chercher l'état d'équilibre des conducteurs et des corps diélectriques, en attribuant à chacun de ceux-ci non pas son coefficient de polarisation véritable, mais un coefficient fictif défini par l'égalité (7). *On obtiendra alors, sur les corps conducteurs, la densité électrique cherchée et, sur les diélectriques, une polarisation dont il suffira de multiplier les composantes par* $\frac{k'}{k'-k}$ *pour avoir les composantes de la polarisation cherchée.*

Lorsque le système renferme non plus seulement des corps bons conducteurs ou des corps diélectriques parfaitement doux, mais encore des corps mauvais conducteurs électrisés ou des corps diélectriques doués de force coercitive, il n'existe plus aucune règle simple permettant d'en ramener l'étude à celle d'un système plongé dans un milieu isolant idéal.

§ 2. — Attractions entre corps plongés dans un milieu diélectrique.

Considérons divers corps électrisés, dont l'ensemble occupe un espace désigné par l'indice 1 et divers corps diélectriques dont l'ensemble occupe un espace désigné par l'indice 2, plongés dans un milieu diélectrique qui occupe autour d'eux l'espace illimité 3.

D'après l'égalité (16) du Chapitre I, si nous supposons que tous les diélectriques considérés sont isotropes, le potentiel thermodynamique interne du système aura pour expression

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \sum \Theta q + \frac{\varepsilon}{8\pi}\int_1 \Pi(\mathrm{V}+\mathfrak{V})\,dv_1 \\ + \frac{\varepsilon}{8\pi}\int_2 \Pi(\mathrm{V}+\mathfrak{V})\,dv_2 + \int_2 \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2)\,dv_2 \\ + \frac{\varepsilon}{8\pi}\int_3 \Pi(\mathrm{V}+\mathfrak{V})\,dv_3 + \int_3 \mathcal{F}_3(\mathfrak{M}_3)\,dv_3.\end{aligned}$$

Nous allons transformer cette égalité en admettant les hypothèses suivantes :

1° Les corps diélectriques sont parfaitement doux et non électrisés.

2° Leur coefficient d'induction diélectrique ne dépend pas de l'intensité de la polarisation.

Soit k le coefficient d'induction diélectrique du milieu; soit k' le coefficient d'induction diélectrique des diélectriques plongés dans ce milieu. Nous aurons

$$\mathfrak{F}_3(\mathfrak{M}_3) = \frac{\mathfrak{M}_3^2}{2k}, \qquad \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2k'}.$$

D'ailleurs les égalités

$$\mathfrak{A}_3 = -\varepsilon k \frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial x}, \qquad \mathfrak{A}_2 = -\varepsilon k' \frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial x},$$

$$\mathfrak{B}_3 = -\varepsilon k \frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial y}, \qquad \mathfrak{B}_2 = -\varepsilon k' \frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial y},$$

$$\mathfrak{C}_3 = -\varepsilon k \frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial z}, \qquad \mathfrak{C}_2 = -\varepsilon k' \frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial z}$$

donnent

$$\mathfrak{M}_3^2 = \varepsilon^2 k^2 \Pi(V + \mathfrak{V}), \qquad \mathfrak{M}_2^2 = \varepsilon^2 k'^2 \Pi(V + \mathfrak{V}).$$

Si l'on observe que k et k' sont positifs, ces égalités donnent

$$\frac{\mathfrak{M}_3^2}{2k} = \frac{\varepsilon^2}{2} k \Pi(V + \mathfrak{V}), \qquad \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2k'} = \frac{\varepsilon^2}{2} k' \Pi(V + \mathfrak{V}),$$

et l'on a

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F} &= E(\Upsilon - T\Sigma) + \sum \Theta q + \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_1 \Pi(V + \mathfrak{V})\, dv_1 \\ &+ \frac{\varepsilon}{8\pi}(1 + 4\pi\varepsilon k) \left[\int_3 \Pi(V + \mathfrak{V})\, dv_3 + \int_2 (1 + 4\pi\varepsilon\gamma) \Pi(V + \mathfrak{V})\, dv_2 \right], \end{aligned} \right.$$

γ étant défini par l'égalité (7).

Aux restrictions déjà faites pour la démonstration de cette égalité (11), ajoutons maintenant les suivantes :

1° On peut négliger les variations que la quantité Θ subit d'un point à l'autre d'un même corps électrisé.

2° Les corps électrisés sont bons conducteurs.

Soient A, B, ..., L les divers corps électrisés du système; soient Θ_A, Θ_B, ..., Θ_L les valeurs de la quantité Θ qui leur correspondent, valeurs invariables si l'état de ces conducteurs ne change pas; soient Q_A, Q_B, ..., Q_L les charges invariables de ces con-

ducteurs. Nous aurons

$$\sum \Theta q = \Theta_A Q_A + \Theta_B Q_B + \ldots + \Theta_L Q_L.$$

Le second membre est évidemment invariable. La quantité $\sum \Theta q$ étant une constante, nous pouvons la faire disparaître de l'expression du potentiel thermodynamique interne.

Si tous les corps électrisés qui composent le système sont bons conducteurs, nous aurons, pour chacun de ces corps,

$$\varepsilon(V + \mathfrak{V}) + \Theta = \text{const.},$$

ou bien, puisque nous négligeons les variations de Θ,

$$V + \mathfrak{V} = \text{const.},$$

ce qui exige que l'on ait, en tout point de la région 1,

$$\Pi(V + \mathfrak{V}) = 0$$

et, par conséquent,

(12) $$\int_1 \Pi(V + \mathfrak{V})\, dv_1 = 0.$$

Posons

(13) $$U = (1 + 4\pi\varepsilon k)(V + \mathfrak{V}).$$

Nous aurons

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (1 + 4\pi\varepsilon k)\frac{\partial}{\partial x}(V + \mathfrak{V}),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = (1 + 4\pi\varepsilon k)\frac{\partial}{\partial y}(V + \mathfrak{V}),$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = (1 + 4\pi\varepsilon k)\frac{\partial}{\partial z}(V + \mathfrak{V}).$$

Élevons au carré les deux membres de ces équations et ajoutons membre à membre les résultats obtenus ; nous aurons

$$\Pi U = (1 + 4\pi\varepsilon k)^2\, \Pi(V + \mathfrak{V}),$$

et l'égalité (11) deviendra, en tenant compte des diverses remarques que nous venons de faire,

$$\mathfrak{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + \frac{1}{8\pi}\,\frac{\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon k}\left[\int_3 \Pi U\, dv_3 + \int_2 (1 + 4\pi\varepsilon\gamma)\Pi U\, dv_2\right].$$

Donnons au système un déplacement infiniment petit ; les forces

intérieures effectueront un travail $d\mathfrak{T}_i$; le potentiel thermodynamique interne subira une variation $\delta\mathcal{F}$; comme l'équilibre électrique et diélectrique est établi sur le système, on aura

$$d\mathfrak{T}_i + \delta\mathcal{F} = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_i = & -\delta\,\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) \\ & - \frac{1}{8\pi}\,\frac{\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon k}\,\delta\left[\int_3 \Pi\,\mathrm{U}\,dv_3 + \int_2 (1+4\pi\varepsilon\gamma)\,\Pi\,\mathrm{U}\,dv_2\right]. \end{aligned}$$

La quantité

$$-\delta\,\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma)$$

représente le travail des forces intérieures qui agiraient dans le système à l'état neutre. La quantité

$$(14)\qquad d\mathfrak{T}'_i = -\frac{1}{8\pi}\,\frac{\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon k}\,\delta\left[\int_3 \Pi\,\mathrm{U}\,dv_3 + \int_2 (1+4\pi\varepsilon\gamma)\,\Pi\,\mathrm{U}\,dv_2\right]$$

représente le travail des forces électriques.

Considérons un système constitué de la manière suivante :

Il est formé de conducteurs et de diélectriques ayant même forme et même position que dans le système précédent.

Le milieu dans lequel ils sont plongés est impolarisable.

Le coefficient d'induction diélectrique des diélectriques est la quantité γ, définie par l'égalité (7).

Sur les corps conducteurs, nous distribuons de l'électricité de la même manière que dans le système précédent.

Sur les corps diélectriques, les composantes de la polarisation sont liées aux composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de la polarisation dans le système précédent par les relations

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{k'-k}{k'}\,\mathcal{A}, \\[2ex] \mathrm{B} = \dfrac{k'-k}{k'}\,\mathcal{B}, \\[2ex] \mathrm{C} = \dfrac{k'-k}{k'}\,\mathcal{C}. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, un semblable système est en équilibre; la fonction potentielle de la distribution tant électrique que diélectrique qu'il porte est U.

En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas précédent,

on trouverait que, lorsqu'on impose une certaine variation à ce système fictif, les forces intérieures d'origine électrique effectuent un travail

$$(15) \qquad d\mathfrak{F}_i'' = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\delta\left[\int_3 \Pi \mathrm{U}\, dv_3 + \int_2 (1+4\pi\varepsilon\gamma)\Pi \mathrm{U}\, dv_2\right].$$

La comparaison des égalités (14) et (15) donne cette relation

$$d\mathfrak{F}_i' = (1+4\pi\varepsilon k)\, d\mathfrak{F}_i'',$$

qui entraîne la proposition suivante :

Les actions électriques qui agissent dans le système considéré s'obtiennent en multipliant par $(1+4\pi\varepsilon k)$ *la grandeur des forces qui agissent dans le système fictif que nous venons d'étudier, sans changer la direction de ces forces.*

Ce théorème nous permet de comparer entre elles les actions qui s'exercent dans un système plongé au sein d'un milieu impolarisable et les actions qui s'exercent dans le même système plongé au sein d'un milieu polarisable dont k est le coefficient de polarisation.

La présence du milieu polarisable ne change pas la direction des actions qui s'exercent entre deux conducteurs donnés portant des charges données; elle multiplie la grandeur de ces actions par

$$\frac{1}{1+4\pi\varepsilon k}.$$

Elle ne change pas la direction des actions qui s'exercent entre un conducteur donné, portant une charge donnée, et un corps diélectrique dont le coefficient d'induction diélectrique k' est donné; elle multiplie la grandeur de ces actions par

$$\frac{1}{1+4\pi\varepsilon k}\,\frac{k'}{k'-k}.$$

Elle ne change pas la direction des actions qui s'exercent entre deux corps diélectriques dont les coefficients d'induction k' et k'' sont donnés et qui se polarisent sous l'action de conducteurs donnés, portant des charges données; elle multiplie la grandeur de ces actions par

$$\frac{1}{1+4\pi\varepsilon k}\,\frac{k'k''}{(k'-k)(k''-k)}.$$

On peut encore donner du théorème précédent une interprétation très simple et très intéressante.

Posons

$$(16) \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon k},$$

$$(17) \qquad 1 + 4\pi\varepsilon'\gamma' = 1 + 4\pi\varepsilon\gamma.$$

En vertu des égalités (7) et (16), cette dernière égalité devient

$$(18) \qquad \gamma' = k' - k.$$

En vertu des égalités (16) et (17), l'égalité (14) devient

$$(19) \qquad d\mathfrak{C}'_i = -\frac{\varepsilon'}{8\pi}\delta\left[\int_3 \Pi \mathrm{U}\, dv_3 + \int_2 (1 + 4\pi\varepsilon'\gamma')\Pi \mathrm{U}\, dv_2\right].$$

D'ailleurs, en vertu des égalités (7) et (13), les égalités (9) deviennent

$$\mathcal{A} = -\varepsilon' k' \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x},$$

$$\mathcal{B} = -\varepsilon' k' \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y},$$

$$\mathcal{C} = -\varepsilon' k' \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (10) et (18), donnent

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathrm{A} = -\varepsilon'\gamma' \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \\ \mathrm{B} = -\varepsilon'\gamma' \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \\ \mathrm{C} = -\varepsilon'\gamma' \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}. \end{cases}$$

U est, comme nous l'avons vu, la fonction potentielle d'une couche électrique, de densité σ, distribuée à la surface des conducteurs, et d'une polarisation, de composantes A, B, C, distribuée sur les diélectriques.

Les égalités (20) conduisent alors à la conclusion suivante :

Si le milieu diélectrique était supprimé, que la constante ε des lois de Coulomb fût remplacée par la constante ε', que le coefficient d'induction k' des corps diélectriques fût remplacé par le coefficient γ', la distribution de l'électricité en équilibre sur les corps conducteurs ne serait pas changée, et la polarisation en un

point d'un corps diélectrique aurait pour composantes les quantités A, B, C.

Ce premier résultat obtenu, la comparaison des égalités (15) et (19) conduit à ce théorème fondamental :

Dans un milieu diélectrique dont le coefficient d'induction a la valeur k, sont plongés des conducteurs portant des charges déterminées et des corps diélectriques ayant des coefficients de polarisation déterminés. La distribution électrique et diélectrique sur ce système et les actions qui s'exercent dans ce système sont celles que l'on calculerait si, faisant abstraction de l'existence du milieu diélectrique, on attribuait à la constante ε des actions électrostatiques non pas sa valeur réelle, mais la valeur fictive $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon k}$, et, à chaque corps diélectrique, non pas son coefficient d'induction réel, mais un coefficient fictif égal à l'excès de son coefficient réel sur le coefficient du milieu.

Ce théorème suppose que tous les corps électrisés du système sont des corps bons conducteurs et que les seuls corps diélectriques sont des corps parfaitement doux.

Cette dernière restriction est la raison pour laquelle un théorème analogue ne peut pas se rencontrer dans l'étude du magnétisme, les systèmes étudiés ne pouvant pas se composer exclusivement de corps parfaitement doux.

Ce théorème nous montre que, si l'on admet que le vide est susceptible de se polariser, on n'est pas obligé pour cela de rien changer aux lois de la distribution ou des actions électriques; on a seulement à modifier la valeur de la constante fondamentale des lois de Coulomb et des coefficients d'induction des corps diélectriques.

Il résulte de là qu'il n'est pas possible de déterminer la valeur de la constante ε, ni la valeur du pouvoir inducteur k du vide, mais seulement la valeur de la quantité

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon k}.$$

La constante k a-t-elle une valeur notable? La quantité mesurable ε' diffère-t-elle notablement de la valeur qu'il conviendrait

d'attribuer à la quantité inaccessible à l'expérience ε? Il n'est pas possible de répondre d'une façon formelle à cette question.

Il est toutefois une remarque qui rend vraisemblable l'opinion suivante : le coefficient d'induction du vide est une quantité ou nulle ou très petite; la constante ε' diffère peu de ε.

Nous avons vu que le coefficient d'induction apparent d'un diélectrique était lié à son coefficient d'induction vrai par la relation

$$\gamma' = k' - k.$$

Si k avait une valeur notable, on n'aperçoit aucune raison qui puisse empêcher γ' d'avoir, pour certains corps, une valeur négative notable; de tels corps seraient, aux corps diélectriques, ce que les corps diamagnétiques sont aux corps magnétiques; ce seraient des corps *dia-diélectriques.*

Ainsi, *si le vide avait un coefficient d'induction notable, on observerait probablement des corps dia-diélectriques dont le coefficient apparent d'induction aurait une valeur négative notable.*

Or l'expérience ne nous a jamais révélé l'existence d'aucun corps dia-diélectrique; s'il existe de tels corps, ils doivent avoir un coefficient apparent de polarisation très faible. Ce fait s'accorde bien avec l'hypothèse que le vide a un coefficient de polarisation très faible, sans cependant démontrer l'exactitude de cette hypothèse.

De même, l'absence, dans la nature, de tout corps fortement diamagnétique donne à penser que le coefficient d'aimantation du vide est une quantité très petite; c'est ce que nous avons constamment admis aux Livres précédents.

Cette hypothèse que le vide n'est que faiblement diélectrique et magnétique a d'autant plus de prix pour la théorie que, dans les expériences de M. Paul Joubin, le vide semble doué de force coercitive magnétique; il est donc possible qu'il soit doué aussi de force coercitive diélectrique; si ses propriétés magnétiques et diélectriques étaient notables, la théorie entière de l'électricité et du magnétisme serait remise en question.



CHAPITRE IV.

LES CRISTAUX PYRO-ÉLECTRIQUES.

§ 1. — L'état d'équilibre d'un cristal hémimorphe homogène.

Dans les Chapitres précédents, nous avons étudié l'état d'équilibre de corps dont la structure vérifie les conditions exprimées par les égalités

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

Nous allons maintenant nous affranchir de cette restriction et étudier des corps diélectriques hémimorphes. Nous supposerons seulement, pour ne pas compliquer nos calculs, que le cristal étudié soit homogène.

Prenons pour axes de coordonnées Ox, Oy, Oz les directions des axes d'élasticité de notre cristal. Si ce cristal est un *diélectrique parfaitement doux,* en raisonnant comme nous l'avons fait au Livre X, Chapitre I, § 6, nous trouverons que l'on doit avoir, en tout point de ce cristal,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\frac{1}{T}\left\{\delta_{11}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x}+\lambda\right]+\delta_{12}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y}+\mu\right]+\delta_{13}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z}+\nu\right]\right\},\\
\mathcal{B} &= -\frac{1}{T}\left\{\delta_{21}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x}+\lambda\right]+\delta_{22}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y}+\mu\right]+\delta_{23}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z}+\nu\right]\right\},\\
\mathcal{C} &= -\frac{1}{T}\left\{\delta_{31}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x}+\lambda\right]+\delta_{32}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y}+\mu\right]+\delta_{33}\left[\varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z}+\nu\right]\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Dans cette égalité, les quantités T et δ_{pq} sont des fonctions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, liées aux coefficients de la surface d'induction diélectrique, comme on l'a vu au Livre X, Chapitre I, § 4.

Ces coefficients satisfont à la condition

$$\delta_{pq} = \delta_{qp}.$$

Si le cristal étudié est, en outre, *bon conducteur*, on devra avoir, en tout point de ce cristal, suivant la démonstration donnée au § 2 du Chapitre précédent,

$$\varepsilon(V + \mathfrak{V}) + \Theta = \text{const.},$$

ou bien, à cause de l'homogénéité du cristal,

$$\varepsilon(V + \mathfrak{V}) = \text{const.} \tag{2}$$

La condition (2) simplifie extrêmement les égalités (1), qui deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu), \\ \mathcal{B} &= -\frac{1}{T}(\delta_{21}\lambda + \delta_{22}\mu + \delta_{23}\nu), \\ \mathcal{C} &= -\frac{1}{T}(\delta_{31}\lambda + \delta_{32}\mu + \delta_{33}\nu). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les quantités λ, μ, ν ont la même valeur en tout point du cristal homogène; les quantités T et δ_{pq} sont, en tout point de ce cristal, les mêmes fonctions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Ces équations (3) conduiront donc à prendre pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les mêmes valeurs en tous les points du cristal. D'où la conclusion suivante :

Lorsque l'équilibre est établi sur un cristal hémimorphe et conducteur, il présente, dans toute sa masse, une polarisation diélectrique uniforme qui ne dépend que de sa nature et de sa température.

Si l'on a, dans toute la masse du cristal,

$$\mathcal{A} = \text{const.}, \qquad \mathcal{B} = \text{const.}, \qquad \mathcal{C} = \text{const.},$$

on a aussi

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z} = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta\mathfrak{V} = 0.$$

L'équation (2) donne alors

$$\Delta V = 0;$$

d'où la conclusion suivante :

Lorsque l'équilibre électrique est établi sur un cristal hé-

mimorphe et conducteur, il ne renferme pas d'électricité libre à son intérieur.

Cherchons de quelle manière l'électricité est distribuée à la surface de ce cristal.

La densité superficielle de l'électricité est donnée par la formule

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_e}\right).$$

Mais l'égalité (2) donne

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_i}.$$

On peut donc écrire

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_e}\right) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial N_e}(V + \mathfrak{V});$$

en remarquant que

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_e}\right) = \mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z),$$

on voit que l'on a

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' \tag{4}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} \sigma' &= \mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z), \\ \sigma'' &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial N_e}(V + \mathfrak{V}). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Il est aisé de donner une interprétation de ces deux densités σ', σ'' définies par les égalités (5).

La polarisation du cristal étant uniforme et, par conséquent, solénoïdale, on sait (Livre VII, Chap. IV, § 2) que l'action que cette polarisation exerce sur les points extérieurs au cristal équivaut à l'action d'une couche superficielle ayant pour densité

$$-[\mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z)].$$

La densité σ' est égale et de signe contraire à la précédente, en sorte que l'action, aux points extérieurs au cristal, de la couche qui a cette densité, détruit exactement l'action exercée aux mêmes points par la polarisation du cristal.

Pour interpréter la densité σ'', nous remarquerons que la fonction $(\mathfrak{V} + V)$, continue dans tout l'espace, admet à l'intérieur du

cristal une valeur constante A et est harmonique à l'extérieur du cristal. Dès lors, on voit que la densité σ'' est celle d'une couche qui, en équilibre d'elle-même sur un conducteur de même forme que le cristal, porterait ce conducteur au niveau potentiel A.

Résumons ces conclusions :

Un cristal hémimorphe et conducteur en équilibre porte, à sa surface, une couche électrique.

Cette couche peut être regardée comme formée par la superposition de deux autres couches.

La densité de la première est, en tout point, égale et de signe contraire à la densité de la couche fictive qui équivaut à la polarisation du cristal.

La seconde est la couche qui, en équilibre d'elle-même sur un conducteur de même forme que le cristal, communiquerait à ce conducteur un niveau potentiel égal à la valeur constante de $(V + \mathfrak{V})$ *à l'intérieur du cristal.*

L'action du cristal aux points extérieurs se réduit à l'action de cette dernière couche.

Supposons, en particulier, le cristal en communication avec le sol; on a alors

$$V + \mathfrak{V} = 0,$$

et la dernière couche disparaît. Si l'on observe que tout cristal est plus ou moins conducteur, on arrive sans peine à la conclusion suivante :

Si un cristal hémimorphe, dont la température est maintenue constante, est mis en communication avec le sol pendant un temps d'une longueur suffisante, il ne manifestera plus aucun signe d'électricité.

Des deux couches en lesquelles peut se décomposer l'électrisation du cristal, la première a une masse nulle; pour que la seconde ait une masse nulle, il faut qu'elle ait en tout point une densité nulle. *Si donc on n'a communiqué aucune charge électrique à un cristal, si on le maintient à température constante et isolé, il cessera toujours, au bout d'un temps d'une durée suffisante, de manifester aucune action électrique.*

Tout ce qui précède est général; adoptons maintenant, pour les phénomènes diélectriques présentés par les cristaux, une hypothèse approximative analogue à celle que nous avons adoptée pour les phénomènes magnétiques et que nous avons nommée l'approximation de Poisson (Livre X, Chap. II).

Prenons pour axes de coordonnées les *axes principaux d'induction diélectrique;* soient ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 les *coefficients principaux d'induction diélectrique;* soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ les composantes de l'induction rapportées à ces axes; nous aurons, au lieu des égalités (3), les égalités

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\varpi_1 \lambda, \\ \mathfrak{B} = -\varpi_2 \mu, \\ \mathfrak{C} = -\varpi_3 \nu. \end{cases}$$

Dès lors, il est aisé de déterminer la direction de la polarisation du cristal.

Prenons l'*ellipsoïde inverse d'induction diélectrique* du cristal, surface qui a pour équation

$$\varpi_1 \xi^2 + \varpi_2 \eta^2 + \varpi_3 \zeta^2 = 1.$$

Par le centre Ω de cette surface, menons un rayon vecteur dont les cosinus directeurs soient proportionnels à $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$. L'*induction diélectrique du cristal est normale au plan conjugué de cette direction.*

Si le cristal est un cristal uniaxe, et si l'on prend pour axe des x l'axe du cristal, on aura évidemment, par raison de symétrie,

$$\varpi_2 = \varpi_3, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0,$$

et les égalités (6) deviendront

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\varpi_1 \lambda, \\ \mathfrak{B} = 0, \\ \mathfrak{C} = 0. \end{cases}$$

La polarisation sera alors dirigée suivant l'axe du cristal.

§ 2. — Les phénomènes pyro-électriques.

Pour un cristal donné, les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, données par les équations (3), sont des fonctions de la température. Désignons

par T la température absolue, et par $\mathcal{A}(T)$, $\mathcal{B}(T)$, $\mathcal{C}(T)$ les valeurs de ces fonctions à la température T.

Imaginons que nous prenions un cristal qui a été longtemps en communication avec le sol et ne présente plus aucune trace d'électricité. En le gardant soigneusement isolé, portons-le à une certaine température T et maintenons-le très longtemps à cette température, de manière que l'équilibre s'établisse. Le cristal portera alors, à sa surface, une distribution électrique dont la densité superficielle $\sigma(T)$ aura pour valeur, d'après les égalités (5),

$$\sigma(T) = \mathcal{A}(T)\cos(N_i, x) + \mathcal{B}(T)\cos(N_i, y) + \mathcal{C}(T)\cos(N_i, z).$$

Supposons ensuite que l'on refroidisse rapidement ce cristal, de manière à l'amener à la température T_0, et imaginons que le cristal soit très mauvais conducteur de l'électricité. La polarisation interne changera aussitôt; si l'on néglige l'influence polarisante du champ créé à l'intérieur par la distribution superficielle, les composantes de cette polarisation prendront les valeurs

$$\mathcal{A}(T_0), \quad \mathcal{B}(T_0). \quad \mathcal{C}(T_0).$$

Mais, au contraire, chaque élément de la surface du cristal gardera sensiblement, pendant un certain temps, la charge électrique qu'il portait à la température T. Il en résulte que la couche électrique superficielle n'annulera plus exactement, aux points extérieurs au cristal, l'action de la polarisation du cristal, et celui-ci manifestera des actions électriques qui, à la longue, finiront par disparaître.

Négligeons le léger changement de forme que subit la surface du cristal lorsque celui-ci passe de la température T à la température T_0. A la température T_0, on pourra regarder la couche superficielle comme ayant encore pour densité (au moins dans les premiers instants)

$$\sigma(T) = \mathcal{A}(T)\cos(N_i, x) + \mathcal{B}(T)\cos(N_i, y) + \mathcal{C}(T)\cos(N_i, z),$$

tandis que la polarisation du cristal exercera les mêmes actions extérieures qu'une couche électrique ayant pour densité superficielle

$$-[\mathcal{A}(T_0)\cos(N_i, x) + \mathcal{B}(T_0)\cos(N_i, y) + \mathcal{C}(T_0)\cos(N_i, z)].$$

Le cristal exercera donc les mêmes actions électriques extérieures qu'une couche électrique, distribuée à sa surface et ayant pour densité

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma(T_1, T_0) = {} & [\mathcal{A}(T) - \mathcal{A}(T_0)] \cos(N_i, x) \\ & + [\mathcal{B}(T) - \mathcal{B}(T_0)] \cos(N_i, y) \\ & + [\mathcal{C}(T) - \mathcal{C}(T_0)] \cos(N_i, z). \end{aligned} \right.$$

Nous avons vu (Livre VII, Chap. IV, § 2) comment on peut obtenir, d'une manière très simple, une image géométrique de la densité $\Sigma(T, T_0)$.

Considérons la surface S du cristal; donnons-lui une translation infiniment petite parallèle à la grandeur géométrique qui a pour composantes

$$\begin{gathered} \mathcal{A}(T) - \mathcal{A}(T_0), \\ \mathcal{B}(T) - \mathcal{B}(T_0), \\ \mathcal{C}(T) - \mathcal{C}(T_0); \end{gathered}$$

soit S' la nouvelle position de la surface S.

Entre S' et S est une couche infiniment mince dont une partie est intérieure à la surface S, tandis que l'autre partie lui est extérieure. Remplissons ces deux parties de fluide électrique dont la densité ait partout la même valeur absolue, mais soit positive dans la première partie et négative dans la seconde. La densité $\Sigma(T, T_0)$, définie par l'égalité (8), aura en chaque point de la surface S le même signe que cette couche et sa grandeur sera proportionnelle à l'épaisseur de cette couche.

Supposons, en particulier, que le cristal soit un cristal uniaxe; prenons la direction de l'axe du cristal pour axe des x. Nous aurons

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(T) &= 0, & \mathcal{B}(T_0) &= 0, \\ \mathcal{C}(T) &= 0, & \mathcal{C}(T_0) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$\mathcal{A}(T) - \mathcal{A}(T_0) > 0.$$

Taillons dans ce cristal un prisme droit, dont les arêtes BB soient parallèles à Ox.

D'après ce qui précède, à la température T_0, la base B semblera porter du fluide négatif dont la densité sera

$$-[\mathcal{A}(T) - \mathcal{A}(T_0)].$$

La charge apparente de cette base sera, en désignant par S sa surface,

$$-[\mathcal{A}(T)-\mathcal{A}(T_0)]S.$$

La base B' portera, en apparence, du fluide positif en quantité égale.

Les faces latérales du prisme ne sembleront pas électrisées.

L'expérience a devancé depuis longtemps ces indications de la théorie.

Vers la fin du XVII[e] siècle, les Hollandais rapportèrent de Ceylan une pierre curieuse que les indigènes nommaient *tournamal,* c'est-à-dire *tire-cendres,* à cause de la propriété qu'elle possède d'attirer les cendres lorsqu'on la jette dans le feu. C'est la pierre qui porte aujourd'hui, en Minéralogie, le nom de *tourmaline*.

Lémery en donna la première description en 1717. En 1756, Œpinus montra que les propriétés de la tourmaline sont dues à un développement d'électricité, et que les deux extrémités d'un cristal échauffé sont toujours électrisées en sens contraire, l'une positivement et l'autre négativement. Bergmann montra plus tard que les électricités de signe contraire qui se dégagent aux deux extrémités d'une tourmaline chauffée sont toujours égales en quantité.

En 1759, Canton (¹) fit observer que l'électrisation d'une tourmaline n'est pas due à la température même, mais à ses variations. Un cristal de tourmaline, étant porté à une température déterminée et ramené à l'état neutre, demeurera à l'état neutre tant que la température ne subira aucune variation; mais il s'électrisera immédiatement si la température vient à changer, et les effets de l'électrisation obtenus seront de sens contraires selon que l'on échauffe le cristal ou qu'on le laisse refroidir. Cette observation est capitale; c'est peut-être la plus importante qui ait été faite dans cet ordre de phénomènes dont elle marque le caractère particulier.

Les phénomènes pyro-électriques ne sont pas particuliers à la tourmaline; on les a observés, comme nous le verrons, sur un grand nombre de cristaux, mais à un degré moins élevé.

(¹) *Philosophical Transactions,* Vol. LI, p. 403.

La théorie des phénomènes pyro-électriques a été ébauchée par Sir W. Thomson (¹) et plus complètement traitée par M. Ed. Riecke (²). Nous avons donné, de notre côté, une théorie des phénomènes pyro-électriques (³). Cette théorie, comme nous l'a fait remarquer M. Lorberg, est complètement erronée.

§ 3. — Expériences de Gaugain.

Nous avons vu au paragraphe précédent que la charge apparente portée par l'une des bases d'un prisme de tourmaline refroidi de la température T à la température T_0 a pour valeur absolue

$$Q = [\mathcal{A}(T) - \mathcal{A}(T_0)]S.$$

Cette charge est proportionnelle à la section du prisme et indépendante de sa longueur; en sorte que la quantité d'électricité que peut développer une batterie de tourmalines associées par leurs pôles de même nom est égale à la somme des quantités que fourniraient les éléments séparés, et qu'une pile de tourmalines superposées développe exactement la même quantité d'électricité que l'un quelconque des éléments qui servent à la former.

La quantité d'électricité que produit une tourmaline, lorsque sa température s'élève d'un nombre donné de degrés, est précisément la même que celle qui résulterait d'un abaissement de température égal. Mais le signe des deux pôles de la tourmaline est renversé.

Ces diverses propositions ont été obtenues par Gaugain (⁴) dans une étude expérimentale très soignée des phénomènes pyro-électriques.

(¹) Sir W. Thomson, *On thermoelastic, thermomagnetic and pyroelectric properties of matter* (*Philosophical Magazine*, 5ᵉ série, t. V, p. 24; 1878).

(²) Ed. Riecke, *Ueber die Pyroelectricität des Turmalins* (*Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. XXVIII, p. 43; 1886).

(³) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. III, p. 263; 1886.

(⁴) Gaugain, *Memoire sur l'électricité des tourmalines* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LVII, p. 5; 1859).

§ 4. — Cristaux naturellement et accidentellement pyro-électriques.

Les phénomènes pyro-électriques ne sont pas particuliers à la tourmaline; on les a observés dans un grand nombre de cristaux. Canton avait déjà reconnu les mêmes propriétés dans la topaze et l'émeraude du Brésil; Brard dans l'axinite; Haüy dans la boracite, le mésotype, l'oxyde de zinc, la prehnite, le sphène; Brewster dans beaucoup d'autres minéraux naturels tels que le quartz et dans plusieurs cristaux artificiels, parmi lesquels le tartrate double de potasse et de soude et l'acide tartrique.

Toutes ces recherches ont conduit à une importante corrélation entre la forme cristalline et les phénomènes pyro-électriques.

Haüy ([1]) a remarqué, le premier, que les substances cristallisées qui possèdent les propriétés pyro-électriques, telles que la tourmaline, la calamine et la boracite, dérogent à la loi de symétrie et sont frappées d'hémiédrie. Cette observation a été ensuite confirmée et généralisée en particulier par les nombreuses expériences de Riess et Rose ([2]).

En 1866, M. Hankel ([3]) publia une longue série de recherches sur la pyro-électricité des cristaux. Ces recherches conduisaient à cette conséquence paradoxale que l'axe de pyro-électricité est une droite déterminée *de direction et de position,* tandis que, en Cristallographie, toutes les droites sont déterminées seulement en direction.

MM. Friedel et J. Curie ([4]) montrèrent que les phénomènes singuliers observés par M. Hankel devaient s'expliquer par un échauffement irrégulier des cristaux étudiés, qui, en altérant la symétrie de la structure des cristaux, les douait d'une *pyro-électricité accidentelle.*

MM. Friedel et J. Curie poussèrent plus loin ces recherches;

([1]) HAÜY, *Traité de Minéralogie,* t. III, p. 54. — *Observations sur les propriétés électriques du borate magnésio-calcaire* (*Annales de Chimie et de Physique,* 1re série, t. IX, p. 59; 1791).

([2]) RIESS et ROSE, *Sur la pyro-électricité des minéraux* (*Archives d'Électricité,* t. III, p. 585).

([3]) *Voir* G. WIEDEMANN, *Die Lehre von der Elektricität,* IIe Bd., p. 320.

([4]) CH. FRIEDEL et J. CURIE, *Sur la pyro-électricité du quartz* (*Bulletin de la Société minéralogique de France,* t. V, p. 282; 1882).

ils montrèrent que la pyro-électricité accidentelle était extrêmement fréquente, qu'elle était la véritable cause d'une foule de phénomènes attribués à la pyro-électricité normale. Partant de ce principe, auquel MM. P. et J. Curie avaient été conduits par des expériences dont nous parlerons au Chapitre suivant, qu'une lame cristalline développe une quantité d'électricité proportionnelle à la dilatation de la substance dans la direction normale à la lame et au cosinus de l'angle que cette direction fait avec l'axe d'hémiédrie, ils n'hésitèrent pas à déclarer que la pyro-électricité du quartz, des substances cubiques, telles que la blende et le chlorate de soude, qui présentent l'hémiédrie tétraédrique ou la tétartoédrie, était purement accidentelle et due à un échauffement irrégulier. En effet, l'expérience montra que ces substances ne donnaient aucun signe d'électricité lorsqu'on les chauffait régulièrement [1]. L'étude de la pyro-électricité de la boracite donna aux idées de MM. Friedel et J. Curie une nouvelle confirmation.

Les idées de MM. Friedel et J. Curie ont été exposées par M. Mallard dans son *Traité de Cristallographie* [2]. M. Mallard en a déduit la condition nécessaire pour qu'un cristal jouisse de la pyro-électricité normale : *Le cristal ne doit pas avoir de centre et ne doit présenter qu'un seul axe de symétrie.*

Cette règle est conforme à la théorie précédente. En effet, pour qu'un cristal soit pyro-électrique, il faut que l'on n'ait pas à la fois

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

Si l'on se souvient de ce qui a été dit plus haut (Livre X, Chap. IV, § 1), on est immédiatement amené à la règle de M. Mallard.

Nous avons vu qu'une substance dont la structure admettait un centre à l'état naturel avait encore un centre après une légère déformation; en sorte que, pour cette substance légèrement déformée, on a encore

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

---

(1) CH. FRIEDEL et J. CURIE, *Sur la pyro-électricité du quartz* (*Bulletin de la Société minéralogique de France*, t. V, p. 282; 1882). — *Sur la pyro-électricité dans la blende, le chlorate de sodium et la boracite* (*Ibid.*, t. VI, p. 191; 1883). — *Sur la pyro-électricité de la topaze* (*Ibid.*, t. VIII, p. 116; 1885).

(2) E. MALLARD, *Traité de Cristallographie*, Vol. II, p. 171.

Si l'on admet qu'un échauffement irrégulier produit seulement de petites déformations, on voit qu'un échauffement irrégulier ne pourra rendre cette substance pyro-électrique. On arrive donc ainsi à cette nouvelle règle :

La pyro-électricité accidentelle ne se peut présenter que dans les substances hémiédriques privées de centre.



CHAPITRE V.

LES CRISTAUX PIÉZO-ÉLECTRIQUES.

§ 1 — Dégagement de l'électricité par la compression de substances cristallisées.

MM. Pierre et Jacques Curie (¹) ont montré que l'on pouvait obtenir un dégagement d'électricité sur les cristaux hémièdres non seulement par des variations de température, mais encore par des variations de pression. Leurs recherches sont devenues le point de départ de l'étude, aujourd'hui très étendue, des phénomènes *piézo-électriques*. Nous allons indiquer ici quelques principes théoriques qui permettent d'éclairer cette étude.

Considérons un cristal à l'état naturel, et prenons pour axes de coordonnées trois droites rectangulaires quelconques $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. La grandeur (λ, μ, ν) a, par rapport à ces trois droites, des composantes λ_0, μ_0, ν_0. Si le cristal est homogène, nous savons qu'il présente à son intérieur une polarisation uniforme ayant pour composantes

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_0 = -\frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda_0 + \delta_{12}\mu_0 + \delta_{13}\nu_0), \\ \mathcal{B}_0 = -\frac{1}{T}(\delta_{21}\lambda_0 + \delta_{22}\mu_0 + \delta_{23}\nu_0), \\ \mathcal{C}_0 = -\frac{1}{T}(\delta_{31}\lambda_0 + \delta_{32}\mu_0 + \delta_{33}\nu_0). \end{cases}$$

Le cristal, mis en communication avec le sol, lorsque l'équilibre électrique est établi, présente à sa surface une densité

$$(2)\qquad \sigma_0 = \mathcal{A}_0 \cos(N_i, x) + \mathcal{B}_0 \cos(N_i, y) + \mathcal{C}_0 \cos(N_i, z),$$

(¹) P. et J. Curie, *Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées* (*Bulletin de la Société de Minéralogie*, t. III, p. 90; 1880).

qui masque, à l'extérieur, l'effet de la polarisation interne du cristal.

Faisons subir au cristal une légère déformation. Soient

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

les composantes des dilatations suivant les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ et

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi}$$

les composantes des glissements. Les quantités λ, μ, ν d'un côté, et les quantités $\frac{\delta_{pq}}{T}$ d'un autre côté, varieront. Nous admettrons l'hypothèse simplificatrice suivante, qui semble suffisante pour l'étude des phénomènes piézo-électriques :

Les variations des quantités λ, μ, ν sont grandes par rapport aux variations des quantités $\frac{\delta_{pq}}{T}$.

Imaginons, en outre, que la déformation imposée au cristal laisse ce cristal homogène; le cas où le cristal ne serait plus homogène conduirait, en général, à des considérations trop compliquées pour qu'il y ait intérêt à les développer.

Nous aurons alors, à l'intérieur du cristal, une polarisation uniforme ayant pour composantes

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu), \\ \mathcal{B} &= -\frac{1}{T}(\delta_{21}\lambda + \delta_{22}\mu + \delta_{23}\nu), \\ \mathcal{C} &= -\frac{1}{T}(\delta_{31}\lambda + \delta_{32}\mu + \delta_{33}\nu). \end{aligned} \right.$$

Cette polarisation exerce la même action extérieure qu'une couche électrique distribuée à la surface du cristal et ayant pour densité

$$(4) \qquad \sigma = -[\mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z)].$$

Supposons que, pendant la compression, le cristal ait été maintenu isolé et que sa substance soit très mauvaise conductrice de l'électricité. Pendant les premiers moments qui suivent la com-

pression, chaque élément de la surface du cristal conserve sensiblement la charge qu'il portait avant la compression. Si l'on néglige la faible déformation de la surface du cristal, on peut dire que, dans les premiers moments qui suivent la compression, cette surface porte encore une couche électrique dont la densité en chaque point est donnée par l'égalité (2).

L'action extérieure du cristal résultera donc de l'action de la couche électrique réelle dont la densité est donnée par l'égalité (2) et de l'action de la couche électrique fictive dont la densité est donnée par l'égalité (4). Le cristal *semblera* donc recouvert d'une couche électrique ayant pour densité

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma = \sigma_0 + \sigma = \; & (\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}) \cos(N_i, x) \\ & + (\mathcal{B}_0 - \mathcal{B}) \cos(N_i, y) \\ & + (\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}) \cos(N_i, z). \end{aligned} \right.$$

Peu à peu, cette électrisation apparente se dissipera, car l'électricité finira par prendre à la surface du cristal sa distribution d'équilibre qui masquera l'effet de la polarisation intérieure.

Nous aurons

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_0 + l_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} + l_2 \frac{\partial V}{\partial \eta} + l_3 \frac{\partial W}{\partial \zeta} \\ + l_4 \left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) + l_5 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + l_6 \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} \right), \end{aligned}$$

et des formules analogues pour μ et ν. La densité superficielle apparente Σ est alors la somme de trois termes semblables dont voici le premier

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \Bigg\{ \; & \delta_{11} \Bigg[l_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} + l_2 \frac{\partial V}{\partial \eta} + l_3 \frac{\partial W}{\partial \zeta} \\ & \qquad + l_4 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) + l_5 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + l_6 \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \Bigg] \\ & + \delta_{12} \Bigg[m_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} + m_2 \frac{\partial V}{\partial \eta} + m_3 \frac{\partial W}{\partial \zeta} \\ & \qquad + m_4 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) + m_5 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + m_6 \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \Bigg] \\ & + \delta_{13} \Bigg[n_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} + n_2 \frac{\partial V}{\partial \eta} + n_3 \frac{\partial W}{\partial \zeta} \\ & \qquad + n_4 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) + n_5 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + n_6 \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}$$

On remarquera que les quantités λ_0, μ_0, ν_0 ne figurent pas dans cette expression; par conséquent, *pour qu'une substance puisse présenter les phénomènes piézo-électriques, il n'est pas nécessaire qu'elle soit naturellement pyro-électrique.*

Mais, en revanche, une substance ne peut présenter les phénomènes piézo-électriques que si les quantités l, m, n ne sont pas toutes nulles; en d'autres termes, pour qu'une substance puisse présenter les phénomènes piézo-électriques, il faut qu'elle puisse présenter au moins la pyro-électricité accidentelle. D'où cette nouvelle proposition :

Les seules substances qui puissent présenter les phénomènes piézo-électriques sont les substances frappées d'une hémiédrie qui les prive de centre.

Nous allons étudier successivement la piézo-électricité d'une substance naturellement pyro-électrique, la tourmaline, et la piézo-électricité d'une substance accidentellement pyro-électrique, le quartz.

§ 2. — Piézo-électricité de la tourmaline.

C'est en étudiant la tourmaline que MM. Pierre et Jacques Curie ont découvert les phénomènes piézo-électriques (¹).

La tourmaline cristallise dans le système ternaire avec un mode d'hémiédrie tel que, l'axe ternaire et les trois plans de symétrie qui passent par cet axe étant conservés, le centre et les trois axes binaires sont supprimés.

Plaçons l'axe des ζ suivant l'axe ternaire de la tourmaline. Si l'on se souvient (Livre X, Chap. IV, § 1) que, après une légère déformation, la grandeur (λ, μ, ν) ne peut avoir de composante normale à un plan de symétrie de la substance à l'état naturel, si l'on observe que trois plans de symétrie passent par l'axe ternaire de la tourmaline, on voit que, dans une tourmaline, naturelle ou déformée, la grandeur (λ, μ, ν) sera dirigée suivant l'axe ternaire.

(¹) P. et J. Curie, *Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées* (*Bulletin de la Société de Minéralogie,* t. III, p. 90; 1890).

En d'autres termes, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= 0,\\ \mu &= 0,\\ \nu &= \nu_0 + n_1\frac{\partial U}{\partial \xi} + n_2\frac{\partial V}{\partial \eta} + n_3\frac{\partial W}{\partial \zeta}\\ &\quad + n_4\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \eta}\right) + n_5\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right) + n_6\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi}\right). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, l'ellipsoïde d'induction diélectrique sera évidemment un ellipsoïde de révolution autour de l'axe ternaire. Si l'on désigne par ϖ le coefficient principal d'induction diélectrique suivant cette direction, on voit sans peine que la polarisation *apparente* de la tourmaline sera dirigée suivant l'axe ternaire et aura pour grandeur

$$\mathfrak{M} = \varpi(\nu - \nu_0).$$

Pour obtenir l'électrisation apparente de la tourmaline, on lui donnera, parallèlement à l'axe ternaire, une translation infiniment petite, proportionnelle à $\varpi(\nu - \nu_0)$, et l'on attribuera à la densité superficielle en chaque point une valeur proportionnelle à la distance normale en ce point de la surface primitive de la tourmaline à sa surface déformée. On donnera à cette densité le signe + ou le signe —, selon que, au point considéré, la surface déplacée sera extérieure ou intérieure à la nouvelle surface.

L'une des extrémités de l'axe ternaire sera donc électrisée positivement et l'autre négativement.

Si l'on comprime une lame de tourmaline à faces parallèles, on voit facilement, par ce qui précède, que, pour une même orientation de la lame, la charge électrique apparente de chaque face est proportionnelle à la pression exercée à la surface de la lame et indépendante de l'épaisseur de la lame. Cette loi a été trouvée expérimentalement par MM. P. et J. Curie.

Si, après avoir comprimé la lame et l'avoir ramenée à l'état neutre, on la décomprime, elle prendra une électrisation apparente égale en grandeur et de sens contraire à celle que la compression lui avait fait prendre. Ce résultat est conforme à la fois à la théorie et à l'expérience.

§ 3. — Piézo-électricité du quartz plagièdre.

Nous n'étudierons les phénomènes piézo-électriques du quartz plagièdre que dans un cas particulier, celui que MM. P et J. Curie ont étudié expérimentalement.

Nous supposerons que l'un des axes principaux de dilatation, $O\zeta$, soit dirigé suivant l'axe ternaire du quartz; qu'un autre axe principal de dilatation, $O\eta$, soit dirigé suivant un des axes binaires; le troisième axe principal de dilatation est, naturellement, normal aux deux autres.

Dans ces conditions, les deux extrémités de l'axe ternaire du quartz ne se distinguent l'une de l'autre ni avant, ni après la déformation; nous sommes donc assurés que, avant comme après la déformation, la grandeur (λ, μ, ν) n'admet aucune composante suivant l'axe ternaire du quartz, ce qu'exprime l'égalité

$$\nu = 0. \tag{7}$$

Pour connaître la forme des quantités λ, μ, nous ferons la remarque suivante :

Supposons que la dilatation suivant $O\zeta$ ait une valeur quelconque $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$, mais que les dilatations suivant $O\xi$ et $O\eta$ soient égales entre elles, ce qu'exprime l'égalité

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \eta}.$$

Une semblable déformation conservera la symétrie du quartz, en sorte que, après une telle déformation, nous aurons

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0.$$

Cela exige que les quantités λ, μ soient de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= l\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \eta}\right), \\ \mu &= m\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \eta}\right). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Le coefficient m sera évidemment le même pour un quartz droit

ou un quartz gauche, tandis que le coefficient l changera de signe avec le sens du quartz.

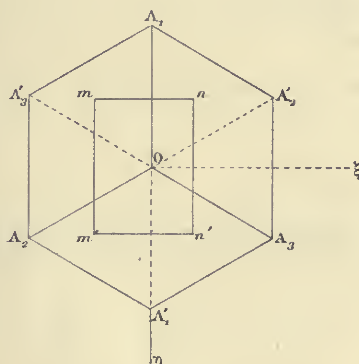
L'ellipsoïde de polarisation diélectrique est évidemment un ellipsoïde de révolution autour de l'axe ternaire du quartz. Si donc on désigne par ϖ le coefficient d'induction diélectrique dans une direction quelconque normale à l'axe du quartz, on aura

$$(9)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -\varpi\, l\left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi} - \dfrac{\partial V}{\partial \eta}\right), \\ \mathcal{B} = -\varpi m\left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi} - \dfrac{\partial V}{\partial \eta}\right), \\ \mathcal{C} = 0. \end{cases}$$

Voici comment MM. P. et J. Curie [1] ont obtenu par l'expérience des résultats conformes à ceux de la théorie précédente.

Soit $A_1 A'_2 \ldots$ (*fig.* 26) la coupe hexagonale, perpendiculaire à

Fig. 26.



l'axe ternaire, d'un cristal de quartz; les diagonales telles que $A_1 A'_1$ sont les axes binaires. Nous supposerons que les sommets A_1, A_2, A_3 sont ceux qui ne portent pas les faces hémiédriques $s = (41\bar{2})$. On taille dans ce cristal un prisme droit, dont la hauteur est parallèle à l'axe ternaire et dont la base $m\,n\,m'n'$ est

(1) P. et J. Curie, *Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées* (*Bulletin de la Société minéralogique*, t. III, p. 90; 1880). — *Phénomènes électriques des cristaux hémièdres à faces inclinées* (*Journal de Physique*, 2e série, t. I, p. 245; 1882).

un rectangle dont les côtés sont respectivement parallèles ou perpendiculaires à l'axe binaire $A_1 A'_1$.

1° On comprime ce prisme parallèlement à l'axe ternaire.

Comme l'ellipsoïde d'élasticité du quartz est évidemment un ellipsoïde de révolution autour de l'axe ternaire, cette compression entraîne

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \eta}.$$

Les égalités (9) donnent alors

$$\mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{B} = 0, \qquad \mathcal{C} = 0.$$

A la suite de cette compression, le quartz ne se polarise pas, il ne présente pas d'électrisation apparente.

2° On exerce sur les faces latérales mn, $m'n'$, une pression normale et uniforme. Soient

S la surface latérale mn;
S' la surface latérale nn';
P le poids comprimant.

Si k, k' désignent deux coefficients qui dépendent de l'élasticité du quartz, on aura

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = k\frac{P}{S}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} = -k'\frac{P}{S}.$$

Le quartz se polarisera; cette polarisation sera déterminée par les égalités

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -\varpi\, l(k+k')\dfrac{P}{S}, \\ \mathcal{B} = -\varpi m(k+k')\dfrac{P}{S}, \\ \mathcal{C} = 0. \end{cases}$$

La face nn' portera une charge électrique apparente

$$Q_1 = -\varpi l(k+k')P\frac{S'}{S}.$$

La face mm' portera une charge apparente égale et de signe contraire. La face mn portera une charge apparente

$$(11) \qquad Q_2 = \varpi m(k+k')P.$$

La face $m'n'$ portera une charge apparente égale et de signe contraire.

D'après les recherches de MM. P. et J. Curie, la face nn' ne manifeste, dans ces conditions, aucune électrisation appréciable.

Le coefficient l est donc ou égal à o *ou très petit.*

D'après les mêmes recherches, Q_2 est positif; par conséquent, le coefficient m est positif.

L'expérience et la théorie s'accordent à montrer que *la charge Q_2 est proportionnelle au poids comprimant et indépendante des dimensions du prisme.*

3° On exerce sur les faces latérales mm', nn' une pression normale et uniforme. Soit P' le poids comprimant. On aura

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -k'\frac{P'}{S'}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} = k\frac{P'}{S'}.$$

Le quartz se polarisera; comme $l = 0$, d'après les expériences précédentes, cette polarisation sera déterminée par les équations

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 0, \\ \mathcal{B} &= \varpi m(k + k')\frac{P'}{S'}, \\ \mathcal{C} &= 0. \end{aligned}$$

Les bases du prisme et les faces latérales mm', nn' ne porteront aucune charge apparente. La face mn portera une charge apparente

$$Q'_2 = -\varpi m(k + k')P'\frac{S}{S'}. \tag{12}$$

Cette charge sera négative, proportionnelle au poids comprimant et au rapport de la surface latérale non comprimée à la surface latérale comprimée; le coefficient de proportionnalité a la même valeur

$$\varpi m(k + k')$$

pour les deux charges Q_2 et Q'_2.

Ces résultats ont été expérimentalement trouvés par MM. P. et J. Curie.

M. Röntgen (1) a fait, sur la piézo-électricité du quartz, une série de recherches plus compliquées. Nous ne voulons pas nous attarder plus longtemps à cette étude; nous renverrons le lecteur curieux de nouveaux détails au *Traité de Cristallographie* de M. E. Mallard (2) et aux Mémoires de M. Röntgen.

---

(1) C.-W. Röntgen, *Ueber die durch elektrische Kräfte erzeugte Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes* (*Wiedemann's Annalen,* t. XVIII, p. 213 et 534; 1882). — *Ueber die thermo-, actino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Quarzes* (*Ibid.*, t. XIX, p. 513; 1883). — *Elektrische Eigenschaften des Quarzes* (*Ibid.,* t. XXXIX, p. 16; 1890).

(2) Mallard, *Traité de Cristallographie,* t. II, p. 555 et suiv.

LIVRE XII.

LES DÉFORMATIONS DES CORPS POLARISÉS.

CHAPITRE PREMIER.

LA PRESSION A L'INTÉRIEUR DES FLUIDES POLARISÉS.

§ 1. — Condition d'équilibre diélectrique ou magnétique d'un fluide compressible.

Nous avons déjà étudié (Livre IX, Chap. VIII) les conditions d'équilibre d'un fluide magnétique quelconque, parfaitement doux ou non, mais supposé incompressible. Nous allons maintenant reprendre cette étude pour un fluide compressible quelconque, magnétique ou diélectrique, mais parfaitement doux.

Désignant par σ le volume spécifique en un point de ce fluide, par dv un élément de volume de ce fluide, nous admettrons que le potentiel thermodynamique interne de ce fluide à l'état neutre soit de la forme

$$\int \Phi(\sigma)\, dv.$$

C'est admettre que l'état du fluide peut être déterminé sans qu'on ait à tenir compte de la position mutuelle de ses divers éléments; c'est, par conséquent, négliger dans cette étude hydrostatique les actions des pressions capillaires. C'est là une hypothèse que nous faisons non pas par nécessité, mais seulement pour abré-

ger nos raisonnements; on pourrait se départir de cette hypothèse en suivant les méthodes que nous avons indiquées ailleurs ([1]).

Nous admettrons également, pour simplifier notre étude, que le système ne porte aucune charge électrique; si nous ne faisions pas cette hypothèse, nous aurions à tenir compte des diverses pressions électriques, que nous pourrions déterminer comme nous l'avons fait dans un Mémoire spécialement consacré à cette étude ([2]).

Nous admettrons enfin que notre fluide à l'état neutre est soumis à deux sortes de forces extérieures :

1° Des forces appliquées à ses divers éléments de volume; ces forces ont pour potentiel la quantité

$$\int \frac{1}{\sigma} \mathrm{V}\, dv,$$

V étant une fonction de x, y, z finie, uniforme et continue en tout point du fluide, et dont la forme ne dépend ni de la forme ni de l'état du fluide; telles seraient l'action de la pesanteur, l'action de plusieurs corps fixes soumis à la loi de la gravitation universelle.

2° Des forces appliquées aux divers éléments de la partie déformable de la surface qui limite le fluide. Un élément $d\mathrm{S}$ de cette surface supporte une force $\mathrm{P}\, d\mathrm{S}$; P est la *grandeur de la pression* en un point de l'élément $d\mathrm{S}$; la direction de la force $\mathrm{P}\, d\mathrm{S}$ est la *direction de la pression* en un point de l'élément $d\mathrm{S}$.

Ce fluide sera ou aimanté, et alors il sera soumis à l'action d'aimants extérieurs; ou polarisé diélectriquement, et alors il sera soumis à l'action de corps électrisés ou polarisés extérieurs; en toutes circonstances, ces corps extérieurs seront supposés d'état invariable.

Nous allons étudier en détail, par une méthode que nous avons déjà employée dans une question analogue ([3]), les conditions d'é-

---

([1]) P. Duhem, *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. II, p. 207; 1885).

([2]) P. Duhem, *Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires.* 1re Partie : *De la pression électrique* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. V, p. 97; 1888).

([3]) P. Duhem, *Sur les dissolutions d'un sel magnétique* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. VII, p. 289; 1890).

quilibre d'un semblable fluide; nous devrons faire cette étude avec d'autant plus de soin que nous en déduirons des conséquences complètement en désaccord avec celles qui ont été introduites dans la science par Maxwell. Dans un prochain Chapitre nous examinerons ces dernières et nous verrons pourquoi il est nécessaire de les rejeter.

Le potentiel thermodynamique interne du système aimanté que nous considérons (nous parlerons sans cesse d'aimants, mais les raisonnements développés et les conséquences obtenues s'appliqueront aussi bien aux diélectriques) peut s'écrire

$$\mathcal{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathfrak{F} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M})\, dv.$$

Dans cette formule, $\mathfrak{F}$ est le potentiel magnétique du système. Les autres lettres ont la signification que nous leur avons constamment attribuée au cours de ce Volume.

Ce potentiel thermodynamique interne ne figure jamais, dans aucune question, que par sa variation; il en résulte que l'on peut, sans inconvénient, supprimer tous les termes qui sont assujettis à demeurer constants.

Supposons le système formé du fluide parfaitement doux considéré et d'aimants permanents et invariables.

La partie variable de $\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma)$ se réduira à

$$\int \Phi(\sigma)\, dv,$$

l'intégration s'étendant au volume entier du fluide parfaitement doux.

La partie variable du terme $\int \mathcal{F}(\mathfrak{M})\, dv$, où l'intégration s'étend à tout le système, se réduira à l'intégrale

$$\int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)\, dv,$$

étendue au fluide polarisé; nous avons mis en évidence la variable σ dont, évidemment, la forme de la fonction $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ dépendra en général.

Enfin, si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont les composantes de l'aimantation en un point du fluide; si $\mathfrak{V}$ est la fonction potentielle magnétique au

même point ; si $\mathcal{V}$ est la fonction potentielle magnétique des corps extérieurs, la partie variable de $\mathcal{F}$ sera

$$\frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right\| dv + \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv.$$

Nous pourrons donc, en altérant seulement $\mathcal{F}$ d'un terme constant, écrire

$$(1) \quad \mathcal{F} = \int \Phi(\sigma)\, dv + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)\, dv + \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right\| dv + \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv.$$

Si nous posons

$$(2) \qquad F(\mathfrak{M}, \sigma) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma}},$$

l'état de polarisation du fluide dénué de force coercitive sera représenté par les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} &= -F(\mathfrak{M}, \sigma) \frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial x}, \\ \mathcal{B} &= -F(\mathfrak{M}, \sigma) \frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial y}, \\ \mathcal{C} &= -F(\mathfrak{M}, \sigma) \frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

§ 2. — Condition d'équilibre mécanique du fluide polarisé.

Cherchons à quelle condition le fluide considéré pourra demeurer immobile.

Pour que l'équilibre soit assuré, il faut et il suffit que, dans toute déformation virtuelle imposée au fluide, la variation éprouvée par le potentiel thermodynamique du fluide soit égale ou supérieure au travail effectué par les forces extérieures.

Si l'on désigne par $d\mathcal{T}_e$ le travail effectué par les forces extérieures dans une modification élémentaire, cette condition s'exprimera ainsi

$$\delta\mathcal{F} \geqq d\mathcal{T}_e$$

ou

$$(4) \qquad \delta\mathcal{F} - d\mathcal{T}_e \geqq 0.$$

Dans le cas particulier où la déformation virtuelle imposée au fluide est *renversable*, c'est-à-dire où l'on obtient une nouvelle déformation virtuelle en changeant tous les signes des déplacements que les divers points éprouvent dans la première, le signe d'inégalité doit évidemment disparaître de la condition précédente, qui devient

$$(5) \qquad \delta\mathcal{F} - d\mathfrak{T}_e = 0.$$

Le travail externe $d\mathfrak{T}_e$ est la somme du travail $d\mathfrak{T}'_e$ effectué par les pressions que supporte la surface du fluide et du travail $d\mathfrak{T}''_e$ des forces appliquées à ses divers éléments de volume :

$$(6) \qquad d\mathfrak{T}_e = d\mathfrak{T}'_e + d\mathfrak{T}''_e.$$

Nous avons d'ailleurs

$$(7) \qquad d\mathfrak{T}'_e = \int P\,[u\cos(P,x) + v\cos(P,y) + w\cos(P,z)]\,dS,$$

u, v, w étant les composantes du déplacement d'un point de l'élément dS et l'intégrale s'étendant à la partie déformable de la surface qui limite le fluide.

Le travail $d\mathfrak{T}''_e$ est la variation changée de signe du potentiel des forces extérieures, potentiel qui a pour expression

$$W = \int \frac{1}{\sigma} V\,dv.$$

Si u, v, w sont les composantes du déplacement du point qui avait pour coordonnées initiales x, y, z, nous aurons

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta\,dv = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) dv, \\ \delta\sigma \;\;\, = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \sigma \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(9) \qquad d\mathfrak{T}''_e = -\,\delta W = \int \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial V}{\partial x}u + \frac{\partial V}{\partial y}v + \frac{\partial V}{\partial z}w\right) dv.$$

Les égalités (6), (7), (9) nous fournissent l'expression complète de $d\mathfrak{T}_e$.

Calculons maintenant la variation $\delta\mathcal{F}$ subie par le potentiel thermodynamique interne du fluide.

D'après l'égalité (1), on peut écrire

$$\delta\mathfrak{F} = A + B + C, \tag{10}$$

les trois quantités A, B, C ayant les significations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} A &= \delta \int \Phi(\sigma)\, dv, \\ B &= \delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)\, dv, \\ C &= \delta \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv + \frac{1}{2}\, \delta \int \left\| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Calculons successivement les trois quantités A, B, C.

1° *Calcul de* A. — Le calcul de A est facile. D'après les égalités (8), on a

$$A = \int \left[\Phi(\sigma) + \sigma \frac{d\,\Phi(\sigma)}{d\sigma}\right] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dv. \tag{12}$$

2° *Calcul de* B. — Supposons que, dans la déformation du fluide, chaque élément entraîne avec lui son aimantation sans que celle-ci change de grandeur ni de direction ; $\mathfrak{M}$ demeurera alors invariable, et, d'après les égalités (8), on aura simplement

$$B = \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma) + \sigma \frac{\partial\, \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma}\right] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dv. \tag{13}$$

3° *Calcul de* C. — La quantité dont C est la variation dépend uniquement de la forme du fluide et de l'aimantation de chaque élément de volume. Donc, pour calculer C, on peut calculer la variation subie par la quantité en question dans une série quelconque de modifications amenant les éléments dont il s'agit du même état initial au même état final que la modification considérée.

Soient

V (*fig.* 27) le volume occupé par le fluide avant et après la modification ;

V_1 le volume qui était rempli par le fluide avant la modification et ne l'est pas après ;

V_2 le volume qui n'était pas rempli par le fluide avant la modification et l'est après.

Il est aisé de voir que, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, la modification considérée pourra être regardée comme résultant des modifications suivantes :

1° En chaque point du volume $V + V_1$, on donne à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les variations

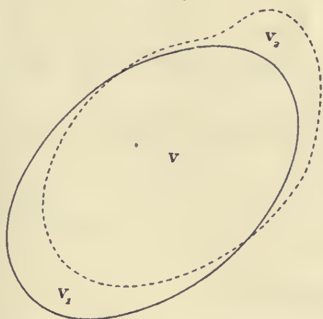
$$\delta\mathcal{A} = -\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}u + \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}v + \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}w\right),$$

$$\delta\mathcal{B} = -\left(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}u + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}v + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}w\right),$$

$$\delta\mathcal{C} = -\left(\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}u + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y}v + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}w\right).$$

2° On supprime ce qui se trouve à l'intérieur du volume V_1.

Fig. 27.



3° On remplit le volume V_2 par une masse de fluide aimanté dont l'aimantation, en chaque point, ait sensiblement même grandeur et même direction qu'aux points du volume V infiniment voisins de celui-là.

On a alors

$$C = C' + C'' + C''', \tag{14}$$

C', C'', C''' étant les quantités analogues à C relatives à ces trois modifications partielles.

Si le volume et la forme du fluide demeurent invariables et si, en même temps, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ subissent des variations quelconques $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, on sait que la quantité

$$\int \left\| \mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv + \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv$$

subit une variation

$$\int \left\| \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x} \right\| \delta\mathcal{A}.$$

On a donc

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} C' = -\int \Big\{ & \left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x} \right] u \\ & + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y} \right] v \\ & + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z} \right] w \Big\} dv. \end{aligned} \right.$$

Si l'on désigne par dS_1 l'un des éléments de la surface S qui confinent au volume V_1, on verra facilement que

$$(16)\qquad C'' = -\mathbf{S} \left\| \mathcal{A}\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x} \right\| \cdot \| u \cos(N_i, x) \| \, dS_1,$$

N_i étant la normale à la surface S vers l'intérieur de cette surface.

De même, si dS_2 désigne un élément de la surface S contigu au volume V_2, on aura

$$(17)\qquad C''' = -\mathbf{S} \left\| \mathcal{A}\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x} \right\| \cdot \| u \cos(N_i, x) \| \, dS_2.$$

Les égalités (3) donnent

$$(18)\qquad \left\| \mathcal{A}\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x} \right\| = -\frac{\mathcal{M}^2}{F(\mathcal{M}, \sigma)},$$

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x} &= -\frac{1}{2F(\mathcal{M}, \sigma)}\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y} &= -\frac{1}{2F(\mathcal{M}, \sigma)}\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z} &= -\frac{1}{2F(\mathcal{M}, \sigma)}\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

D'après l'égalité (2), on a

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2F(\mathcal{M}, \sigma)}\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial x} &= \frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M}, \sigma)}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M}, \sigma)}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \\ \frac{1}{2F(\mathcal{M}, \sigma)}\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial y} &= \frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M}, \sigma)}{\partial y} - \frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M}, \sigma)}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}, \\ \frac{1}{2F(\mathcal{M}, \sigma)}\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial z} &= \frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M}, \sigma)}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M}, \sigma)}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (14), (15), (16), (17), (18), (19) et (20) donnent

$$\begin{aligned} C = & \,\mathbf{S}\, \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)]\, dS \\ & + \int \left[\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial x} u + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial y} v + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial z} w \right] dv \\ & - \int \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} u + \frac{\partial \sigma}{\partial y} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} w \right) dv. \end{aligned}$$

Une intégration par parties permet, enfin, de donner à cette égalité la forme suivante :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} C = & - \int \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} u + \frac{\partial \sigma}{\partial y} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} w \right) dv \\ & + \mathbf{S} \left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} - \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma) \right] [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)]\, dS \\ & - \int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dv. \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant écrire que, dans toute modification du fluide où chaque élément se déplace en gardant une aimantation invariable de grandeur et de direction, on a, conformément à l'inégalité (4) et à l'égalité (10),

$$(22) \qquad A + B + C - d\mathfrak{T}_e \geqq 0.$$

§ 3. — De la pression à l'intérieur d'un fluide polarisé.

Imaginons d'abord la modification suivante :

A l'intérieur du fluide on trace une surface canal infiniment déliée, de section ω, ayant pour directrice une courbe fermée l. A chacun des éléments du fluide compris à l'intérieur de cette surface canal, on donne une translation δl, ayant pour tous la même grandeur et parallèle, pour chacun d'eux, à la tangente au point infiniment voisin de la directrice. Dans une semblable modification, le volume de chaque élément demeure invariable. On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

en tout point du fluide. Nous supposons, en outre, que les molécules fluides infiniment voisines de la surface demeurent immo-

biles, en sorte que l'on a, en tout point de la surface S,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

Ces dernières égalités ont encore lieu pour tout point extérieur à la surface canal. En tout point de la surface canal, on a

$$u = \frac{dx}{dl}\,\delta l,$$

$$v = \frac{dy}{dl}\,\delta l,$$

$$w = \frac{dz}{dl}\,\delta l.$$

Dans ces conditions, l'égalité (7) donne

$$d\mathfrak{T}'_e = 0;$$

l'égalité (9) donne

$$d\mathfrak{T}''_e = \omega\,\delta l \int \frac{1}{\sigma}\,\frac{dV}{dl}\,dl,$$

l'intégrale s'étendant à la directrice de la surface canal.

L'égalité (6) donne alors

$$d\mathfrak{T}_e = \omega\,\delta l \int \frac{1}{\sigma}\,\frac{dV}{dl}\,dl.$$

L'égalité (12) donne

$$A = 0.$$

L'égalité (13) donne

$$B = 0.$$

Enfin l'égalité (21) donne

$$C = -\,\omega\,\delta l \int \frac{\partial\,\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial\sigma}\,\frac{d\sigma}{dl}\,dl,$$

l'intégration s'étendant à la directrice de la surface canal.

La modification considérée étant renversable, l'inégalité (22) se change en une égalité qui s'écrit

$$\int \left[\frac{\partial\,\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial\sigma}\,\frac{d\sigma}{dl} + \frac{1}{\sigma}\,\frac{dV}{dl}\right] dl = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la courbe fermée tracée à l'intérieur du fluide qui sert de directrice à la surface canal. Il doit donc exister une fonction de x, y, z, finie, continue

et uniforme à l'intérieur du fluide, dont

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{\sigma} dV$$

soit la différentielle totale.

Si la quantité

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{\sigma} dV$$

est la différentielle totale d'une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées, il en sera de même de la quantité

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{\sigma} dV + d \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)},$$

du moins, si le fluide ne renferme aucune surface le long de laquelle son aimantation ou sa densité varient d'une manière discontinue. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Il existe une fonction Π, *uniforme, finie et continue à l'intérieur de toute région où le fluide est continu, telle que l'on ait*

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma + d \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} + \frac{1}{\sigma} dV = d\Pi. \tag{23}$$

Ce premier résultat permet de modifier la forme de l'inégalité (22).

Il en résulte, en effet, que la somme du terme

$$-\int \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} u + \frac{\partial \sigma}{\partial y} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} w \right) dv$$

qui figure dans C d'après l'égalité (20) et du terme

$$-\int \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w \right) dv$$

qui figure dans $(-d\mathfrak{T}_e)$, d'après les égalités (6) et (9), peut s'écrire

$$\int \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} - \Pi \right] u \\ + & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} - \Pi \right] v \\ + & \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} - \Pi \right] w \end{aligned} \right\} dv,$$

ou bien, par une intégration par parties,

$$-\int\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M},\sigma)}-\Pi\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dv,$$

$$-\mathrm{S}\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M},\sigma)}-\Pi\right][u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,dS.$$

Ce résultat, joint aux égalités (6), (7), (9), (12), (13) et (21), permet de donner à l'inégalité (22) la forme suivante

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}&-\mathrm{S}\,P[u\cos(P,x)+v\cos(P,y)+w\cos(P,z)]\,dS\\&+\mathrm{S}\,\Pi[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,dS\\&+\int\left[\Phi(\sigma)+\sigma\frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma}+\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\sigma)+\sigma\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\sigma)}{\partial\sigma}-\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M},\sigma)}+\Pi\right]\\&\qquad\times\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dv\leqq 0.\end{aligned}\right.$$

Imaginons maintenant que le fluide éprouve une déformation quelconque dans laquelle chaque particule conserve un volume invariable. On aura alors, en tout point,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Supposons qu'aucune cavité ne se soit creusée dans le fluide pendant cette déformation. La modification considérée sera renversable. On devra donc, d'après la condition (4), avoir dans ce cas l'égalité

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{S}\,P[u\cos(P,x)+v\cos(P,y)+w\cos(P,z)]\,dS\\&-\mathrm{S}\,\Pi[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,dS=0.\end{aligned}\right.$$

Dans cette égalité, les quantités u, v, w ne sont pas absolument arbitraires; mais elles sont assujetties seulement à laisser invariable le volume limité par la surface S, ce qui s'exprime par l'égalité

$$(26)\qquad \mathrm{S}[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,dS=0.$$

Dès lors, d'après un théorème connu du calcul des variations,

il doit exister une quantité C, ayant la même valeur en tout point de la surface S, telle que l'on ait

$$\mathrm{S}\left\{ \begin{aligned} &[\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},x)-(\Pi-\mathrm{C})\cos(\mathrm{N}_i,x)]u \\ +&[\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},y)-(\Pi-\mathrm{C})\cos(\mathrm{N}_i,y)]v \\ +&[\mathrm{P}\cos(\mathrm{P},z)-(\Pi-\mathrm{C})\cos(\mathrm{N}_i,z)]w \end{aligned}\right\} d\mathrm{S}=0,$$

quelles que soient les quantités u, v, w.

En d'autres termes, on doit avoir en tout point de la surface S

$$(27)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},x) &= (\Pi-\mathrm{C})\cos(\mathrm{N}_i,x), \\ \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},y) &= (\Pi-\mathrm{C})\cos(\mathrm{N}_i,y), \\ \mathrm{P}\cos(\mathrm{P},z) &= (\Pi-\mathrm{C})\cos(\mathrm{N}_i,z). \end{aligned}\right.$$

Si la pression P n'est pas égale à o, ces égalités donnent

$$\frac{\cos(\mathrm{N}_i,x)}{\cos(\mathrm{P},x)}=\frac{\cos(\mathrm{N}_i,y)}{\cos(\mathrm{P},y)}=\frac{\cos(\mathrm{N}_i,z)}{\cos(\mathrm{P},z)}.$$

Donc, *pour l'équilibre du fluide, il faut que toute pression qui n'est pas égale à* o *soit normale à l'élément de surface sur lequel elle agit.*

Jusqu'ici nous regardions la grandeur P comme une grandeur non susceptible de signe; maintenant comptons positivement la pression lorsqu'elle est dirigée vers l'intérieur du fluide et négativement dans le sens contraire. Moyennant cette convention, les égalités (27) deviendront

$$(28)\qquad \mathrm{P}+\Pi=\mathrm{C}.$$

L'excès de la pression sur la valeur de la fonction Π *a la même valeur en tout point de la surface déformable du fluide.*

Supposons maintenant que le fluide éprouve une déformation dans laquelle chaque élément conserve un volume invariable, en sorte que l'on ait en tout point

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

mais que le fluide se creuse de cavités. Ces cavités sont creusées autour des points A_1, A_2, A_3, ... Elles ont, au début de la modification, des volumes nuls, et, à la fin de la modification, des

volumes Ω_1, Ω_2, Ω_3, ... La surface déformable S du fluide se compose de la surface Σ qui le limite extérieurement et des surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... qui limitent les cavités.

Les pressions P ne sont appliquées qu'à la surface Σ. Il n'y a pas de pression extérieure appliquée aux divers éléments des surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, ...

La fonction Π est continue; tous les points de la surface Σ_1 sont infiniment voisins du point A_1; donc, en tout point de la surface Σ_1, la fonction Π a sensiblement la valeur Π_1 qu'elle a au point A_1. Les surfaces Σ_2, Σ_3, ... donnent lieu à des considérations analogues.

La modification considérée n'étant pas renversable, on devra, dans la condition (24), conserver le signe d'inégalité, et cette condition deviendra

$$\begin{aligned}
&- \quad \mathsf{S}\, P[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma\\
&+ \quad \mathsf{S}\, \Pi[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma\\
&+ \Pi_1 \mathsf{S}\, [u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma_1\\
&+ \Pi_2 \mathsf{S}\, [u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma_2\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \geqq 0.
\end{aligned}$$

L'égalité (28), invoquée à son tour, transforme cette condition en

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
&- C\, \mathsf{S}[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma\\
&+ \Pi_1 \mathsf{S}[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma_1\\
&+ \Pi_2 \mathsf{S}[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma_2\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \geqq 0.
\end{aligned}\right.$$

La normale N_i étant la normale dirigée vers l'intérieur du fluide, on voit que

$$\mathsf{S}[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma_1$$

représente l'accroissement subi, durant la modification considérée,

par le volume qu'enferme la surface Σ_1. Or ce volume, nul au début de la modification, est égal à Ω_1 à la fin. On a donc

$$\mathbf{S}\,[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma_1=\Omega_1;$$

on a de même

$$\mathbf{S}\,[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma_2=\Omega_2,$$

. . . .

D'autre part, le volume enfermé par la surface Σ augmente de

$$\Omega_1+\Omega_2+\ldots.$$

On a donc

$$-\mathbf{S}\,[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,d\Sigma=\Omega_1+\Omega_2+\ldots.$$

Moyennant ces égalités, la condition (29) devient

$$(\Pi_1+C)\,\Omega_1+(\Pi_2+C)\Omega_2+\ldots\geqq 0.$$

Les points A_1, A_2, ... sont des points quelconques situés dans la masse du fluide. Les volumes Ω_1, Ω_2, ... des cavités sont des quantités nulles ou positives quelconques. L'égalité précédente entraîne donc cette nouvelle proposition :

La quantité $(\Pi+C)$ *ne peut être négative en aucun point du fluide.*

Appliquons ce résultat aux points de la surface même du fluide, en remarquant que, pour ces points, d'après l'égalité (28), on a

$$P=\Pi+C,$$

et nous arriverons à la conclusion suivante :

Pour l'équilibre du fluide, il faut que toute pression extérieure qui n'est pas égale à 0 *soit dirigée vers l'intérieur du fluide.*

La quantité $(\Pi+C)$ n'est jamais négative; elle est égale à la pression extérieure P en tout point de la surface qui limite le fluide. Nous la désignerons par la lettre P et nous la nommerons la *pression au point* (x, y, z) *intérieur au fluide*. Nous verrons

tout à l'heure de quelle définition mécanique cette quantité est susceptible.

Envisageons, en dernier lieu, une modification quelconque où le fluide ne se creuse pas de cavités, mais où chaque élément subit une variation quelconque de volume. La modification étant renversable, la condition (24) se transforme en une égalité qui peut s'écrire, en vertu de la relation (28),

$$\begin{aligned} &-C \mathop{\mathrm{S}} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)]\, dS \\ &+ \int \left\{ \frac{\partial}{\partial\sigma}[\sigma\,\Phi(\sigma) + \sigma\,\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)] - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} + \Pi \right\} \\ &\qquad\qquad \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dv = 0. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\mathop{\mathrm{S}} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)]\, dS = -\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dv.$$

Si l'on se souvient qu'on a, par définition,

$$P = \Pi + C,$$

on voit que la condition d'équilibre peut s'écrire

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial\sigma}[\sigma\,\Phi(\sigma) + \sigma\,\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)] - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} + P \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dv = 0.$$

Or la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

est une fonction arbitraire de x, y, z; la quantité entre accolades est une fonction continue de x, y, z; dès lors, on voit aisément que l'égalité précédente exige *que l'on ait, en tout point de la masse fluide,*

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}[\sigma\,\Phi(\sigma) + \sigma\,\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \sigma)] + P - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} = 0. \tag{30}$$

Ces résultats obtenus, considérons une masse fluide polarisée en équilibre. Soit S la surface qui la limite. Isolons-en une partie A, soit (*fig.* 28) par une surface fermée Σ, tracée en entier à l'intérieur de la surface S, soit (*fig.* 29) par une surface Σ formant une surface fermée avec une portion S_1 de la surface S.

Soit B ce qui reste de la masse fluide lorsqu'on supprime la masse A.

La masse entière étant en équilibre, l'aimantation distribuée sur la masse B a, au point (x, y, z) de la masse A, une fonction potentielle magnétique $\mathfrak{P}(x, y, z)$. Il est toujours possible de trouver des aimants *qui ne soient pas en contact avec la masse* A et qui aient aux divers points de cette masse la même fonction potentielle magnétique $\mathfrak{P}(x, y, z)$ que la masse B. Nous les nommerons *les aimants équivalents à la masse* B.

Fig. 28.

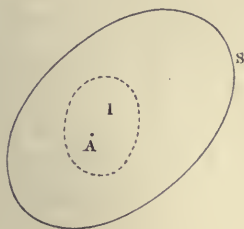
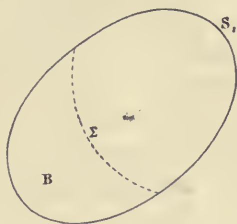


Fig. 29.



Supprimons la masse B. Supposons la masse A soumise :

1° A l'action des forces extérieures dont la fonction potentielle est V;

2° A l'action des aimants qui agissaient sur l'ensemble des masses A et B;

3° A l'action des aimants équivalents à la masse B.

L'aimantation d'équilibre de la masse A, placée dans de telles conditions, sera évidemment identique à l'aimantation que présentait cette même masse dans le système primitif.

Si l'on applique à la surface S_1 les pressions qu'elle supportait dans le système primitif; à la surface Σ une pression normale en tout point à cette surface, dirigée en tout point vers l'intérieur du fluide A, et égale en tout point à la valeur que, dans le système primitif, la quantité P avait en ce point, la masse de fluide A demeurera en équilibre.

En effet, il existera une fonction Π uniforme, finie et continue à l'intérieur du fluide A, telle que l'égalité (23) soit vérifiée en tout point de ce fluide; ce sera la même fonction Π que dans le système primitif.

D'après la définition même de la quantité P, on aura, en tout point de la surface qui limite la masse A, l'égalité

$$P - \Pi = C, \tag{28}$$

C ayant la même valeur que dans le système primitif.

Comme la quantité $(\Pi + C)$ n'était négative en aucun point de l'ensemble des masses A et B, elle n'est négative en aucun point de la masse A.

Enfin l'égalité (30) continue à être vérifiée en tout point de la masse A, puisque aucune des variables qui y figurent n'a changé de valeur par la suppression de la masse B.

On voit donc que l'application à la surface Σ de pressions dont la valeur est P en chaque point remplace la liaison qu'imposait à la masse A la présence de la masse B. Ainsi se trouve justifié le nom de *pression à l'intérieur du fluide* donné à la quantité P. Ce qui précède montre que ce mot a bien ici la signification que Lagrange lui attribue dans la *Mécanique analytique* ([1]), signification que trop peu d'auteurs ont comprise.

§ 4. — Changement de volume d'un fluide polarisé.

Lorsqu'un fluide n'est pas aimanté, on a, en tout point de ce fluide,

$$\mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma) = 0.$$

L'égalité (30), qui doit toujours avoir lieu en tout point de ce fluide, devient alors

$$\frac{d}{d\sigma}[\sigma\Phi(\sigma)] + P = 0. \tag{31}$$

Le premier terme du premier membre est une fonction du volume spécifique σ au point considéré ; cette équation est donc la relation qui lie le volume spécifique σ en chaque point du fluide non polarisé à la pression en ce point ; c'est l'*équation de compressibilité* du fluide non polarisé.

([1]) P. Duhem, *Cours de Physique mathématique et de Cristallographie de la Faculté des Sciences de Lille : Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, Livre V, Chap. III ; Paris, 1891.

Quand, au contraire, le fluide est polarisé, l'équation de compressibilité est remplacée par la relation (31) qui lie entre elles les valeurs prises, en chaque point du fluide, par le volume spécifique, la pression et l'intensité de polarisation.

Ce résultat met en évidence une vérité fondamentale : c'est que, *dans un fluide polarisé, le volume spécifique en chaque point ne dépend pas uniquement de la pression au même point.*

On admet en général, sans démonstration, que, dans un fluide de température déterminée et de nature déterminée, la densité est liée à la pression par une relation qui demeure la même de quelque manière que la pression soit engendrée.

Nous avons vu (t. I, p. 355) que l'exactitude de cette proposition était subordonnée à une condition. Cette condition est vérifiée (1) dans le cas particulier où chaque élément est défini exclusivement par des paramètres qui lui sont propres, cas auquel aucune force intérieure n'agit dans le système. Elle est encore vérifiée dans le cas où les seules forces intérieures au système sont les forces dues à la gravitation universelle; mais elle n'est pas vérifiée en général. Aussi, dans chaque cas particulier, doit-on déterminer directement la loi qui définit le volume spécifique.

Nous avons, à plusieurs reprises, indiqué la méthode qui permet de le faire; nous avons appliqué cette méthode d'abord aux fluides soumis aux seules actions capillaires (2), puis aux fluides qui sont soumis non seulement aux actions capillaires, mais encore aux actions électrostatiques (3).

C'est cette méthode qui nous permet maintenant de déterminer les lois suivant lesquelles varie le volume spécifique d'un fluide polarisé.

Considérons un point d'un fluide polarisé; en ce point le volume spécifique est σ, la pression P, l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$, et l'on

---

(1) P. Duhem, *Cours de Physique mathématique et de Cristallographie de la Faculté des Sciences de Lille : Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. I, p. 72; Paris, 1891.

(2) P. Duhem, *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. II, p. 207; 1885).

(3) P. Duhem, *Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires*. 1re Partie : *De la pression électrique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. V, p. 97; 1888).

a, d'après l'égalité (31),

$$P = \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} - \frac{\partial}{\partial\sigma}[\sigma\Phi(\sigma) + \sigma\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)].$$

Pour que le volume spécifique eût la même valeur en un point intérieur au fluide non polarisé, il faudrait que la pression eût, en ce point, une valeur P′ qui serait, d'après l'égalité (31),

$$P' = -\frac{d}{d\sigma}[\sigma\Phi(\sigma)].$$

La comparaison des deux égalités que nous venons d'écrire donne

$$(32) \qquad P' - P = \frac{\partial}{\partial\sigma}[\sigma\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)] - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)}.$$

Ainsi, *pour obtenir le volume spécifique en chaque point d'un fluide aimanté, on peut faire usage de la loi de compressibilité du fluide non aimanté, mais à la condition d'augmenter la valeur de la pression à l'intérieur de ce fluide d'une pression fictive donnée par l'égalité* (32).

On sait que l'on a

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \sigma)}\, d\mathfrak{M}.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma) = -\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \sigma)]^2} \frac{\partial F(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial\sigma}\, d\mathfrak{M}.$$

D'autre part, on sait [Livre IX, Chap. V, équation (10)] que l'on a

$$\Psi(\mathfrak{M}, \sigma) = \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} - \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma),$$

la quantité $\Psi(\mathfrak{M}, \sigma)$ étant positive pour tous les corps magnétiques.

D'après ces deux relations, l'égalité (32) peut s'écrire

$$(33) \quad P' - P = -\Psi(\mathfrak{M}, \sigma) - \sigma\int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{[F(\mathfrak{M}, \sigma)]^2} \frac{\partial F(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial\sigma}\, d\mathfrak{M}.$$

Le second membre est la somme de deux termes ; le premier est

négatif pour tous les corps magnétiques; le signe du second n'est pas connu; *si l'on néglige la quantité* $\frac{\partial F(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma}$ *devant* $F(\mathfrak{M}, \sigma)$ on pourra négliger le second terme devant le premier. $(P' - P)$ sera alors certainement négatif. Ainsi, pour obtenir le volume spécifique en un point d'un fluide aimanté, on peut, dans les conditions que nous venons d'indiquer, se servir de la loi de compressibilité valable pour le fluide non aimanté; mais on doit remplacer la pression qui s'exerce réellement au point considéré par une pression fictive plus faible. On en conclut immédiatement la proposition suivante :

Le volume spécifique en un point d'un fluide polarisé est supérieur au volume spécifique qu'offrirait le même fluide non polarisé sous une pression égale à celle qui règne en ce point.

La loi de cette dilatation est facile à trouver.

Soit C le coefficient de compressibilité du liquide non polarisé. Soit s le volume spécifique du liquide non polarisé sous la pression P. Le volume spécifique σ du liquide polarisé sous la pression P est identique au volume spécifique que prendrait le liquide non polarisé sous la pression P′. On a donc

$$\frac{s - \sigma}{\sigma_0} = C(P' - P),$$

σ_0 étant le volume spécifique du fluide non polarisé sous une pression égale à o.

Remplaçons $(P' - P)$ par sa valeur (33), en négligeant le second terme devant le premier, et nous aurons

$$\sigma - s = C\sigma_0 \Psi(\mathfrak{M}, \sigma).$$

Adoptons l'approximation de Poisson; soit $k(\sigma)$ le coefficient d'aimantation du fluide dont le volume spécifique est σ; nous aurons

$$\Psi(\mathfrak{M}, \sigma) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2k(\sigma)}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sigma - s}{\sigma_0} = \frac{C\mathfrak{M}^2}{2k(\sigma)}. \tag{34}$$

La pression demeurant la même en un point d'un fluide,

lorsque ce fluide passe de l'état neutre à l'état de polarisation, il se produit en ce point une dilatation qui est :

1° *Proportionnelle au coefficient de compressibilité du fluide ;*

2° *Proportionnelle au carré de l'intensité de polarisation ;*

3° *En raison inverse du coefficient de polarisation.*

Supposons le fluide peu magnétique, et soit J l'intensité du champ dans lequel il est placé. Nous aurons alors

$$\mathfrak{M} = k(\sigma)\, J$$

et, par conséquent, l'égalité (34) deviendra

$$\frac{\sigma - s}{\sigma_0} = \frac{C\, k(\sigma)}{2}\, J^2. \tag{35}$$

La dilatation considérée est alors proportionnelle :

1° *Au coefficient de compressibilité du fluide ;*

2° *Au coefficient d'aimantation du fluide ;*

3° *Au carré de l'intensité du champ.*

La dilatation des liquides diélectriques par l'effet de la polarisation a été constatée par M. Quincke et M. Röntgen.

Un fluide soumis à une polarisation magnétique ou diélectrique demeure toujours isotrope ; on ne saurait donc expliquer par des déformations ici étudiées la double réfraction qui se manifeste, d'après les expériences de M. Kerr, dans les diélectriques polarisés.



CHAPITRE II.

LES PRESSIONS A L'INTÉRIEUR DES SOLIDES POLARISÉS.

§ 1. — Conditions d'équilibre d'un solide primitivement isotrope, peu déformé et polarisé.

Après avoir étudié les conditions d'équilibre d'un fluide polarisé, nous allons, par une voie analogue, chercher les conditions d'équilibre d'un solide polarisé. Mais, au lieu d'aborder le problème dans toute sa généralité, nous nous bornerons à considérer un solide qui, soustrait à toute force extérieure et à toute action magnétique, serait isotrope, et auquel des forces extérieures et des actions magnétiques ont imposé de très petites déformations.

Considérons tout d'abord le solide dénué de toute polarisation magnétique, mais conservant exactement l'état qu'il présente dans le système que nous voulons étudier. Son potentiel thermodynamique interne a, dans ces conditions, une valeur qui est fournie par la théorie de l'élasticité. Soient

$$U, \quad V, \quad W$$

les composantes du déplacement subi, à partir de la position qu'il occupait dans l'état naturel, par le point (x, y, z) du solide. Le potentiel thermodynamique interne du solide non polarisé aura pour expression [1]

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} E(\Upsilon - T\Sigma) = \Omega + \frac{1}{2}\int \Bigg\{ & \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \\ & + 2\mu\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] \\ & + \mu\left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg\} dv, \end{aligned} \right.$$

[1] G. GREEN, *On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non crystallized media* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1838. — *Papers of G. Green*, p. 245). — P. DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*. Livre V, Chap. II; Paris, 1891.

λ et μ étant deux constantes positives qui caractérisent la nature du corps, et l'intégration s'étendant au volume entier du corps. La quantité Ω dépend seulement de l'état naturel du corps.

Pour obtenir le potentiel thermodynamique interne du corps polarisé, il faut joindre au terme précédent deux autres termes; le premier terme a pour valeur (Livre X, Chap. IV)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \int \Big\{ & \left[f + h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + k\,\frac{\partial U}{\partial x}\right]\mathcal{A}^2 \\ & + \left[f + h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + k\,\frac{\partial V}{\partial y}\right]\mathcal{B}^2 \\ & + \left[f + h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + k\,\frac{\partial W}{\partial z}\right]\mathcal{C}^2 \\ & + k\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)\mathcal{B}\mathcal{C} \\ & + k\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\mathcal{C}\mathcal{A} \\ & + k\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\mathcal{A}\mathcal{B}\Big\}\,dv. \end{aligned}\right.$$

f, g, h sont trois fonctions de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$, qui se réduisent à trois constantes si l'on admet l'approximation de Poisson.

Le second terme est le potentiel magnétique. Si l'on désigne par $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique du corps considéré, et par $\mathcal{V}'$ la fonction potentielle magnétique des aimants extérieurs, ce potentiel a pour valeur

$$(3)\qquad \mathfrak{F} = \frac{1}{2}\int \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| dv + \int \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial x} \right\| dv.$$

Nous admettrons en outre que le système est soumis à certaines forces extérieures; les unes seront appliquées aux divers éléments de volume du corps solide étudié; si ρ désigne la densité en un point de l'élément dv, nous désignerons par

$$\rho X\,dv,\quad \rho Y\,dv,\quad \rho Z\,dv$$

les composantes de la force qui sollicite l'élément dv; les autres sont appliquées à la surface S qui limite ce solide; nous désignerons par $P\,dS$ la grandeur de la force appliquée à l'élément dS.

Donnons au solide une déformation infiniment petite. Soient u, v, w les composantes du déplacement du point (x, y, z); les

forces extérieures effectuent un travail qui a pour valeur

$$(4) \qquad d\mathfrak{T}_e = \int \rho(Xu + Yv + Zw)\, dv + \mathbf{S}\, P \,\|\, u\cos(P, x) \,\|\, dS,$$

la première sommation s'étendant au volume entier du solide et la seconde à la surface qui le limite.

Dans le déplacement considéré, les quantités U, V, W subissent respectivement des variations u, v, w. Le terme du potentiel thermodynamique interne donné par l'égalité (1) subit une variation

$$\begin{aligned}
A = \quad & \int \Big\{ \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
& \quad + 2\mu \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
& \quad + \mu \Big[\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
& \qquad + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big]\Big\} dv \\
& + \frac{1}{2}\int \Big\{ \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] \\
& \quad + \mu \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\Big\}\, \delta\, dv.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\delta\, dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dv.$$

On voit donc que, dans l'expression de A, l'élément sous le signe $\int$ de la première intégrale est de l'ordre de

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} dv$$

ou de

$$U u\, dv,$$

tandis que l'élément sous le signe $\int$ de la seconde intégrale est de l'ordre de

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} dv$$

ou de

$$U^2 u\, dv.$$

U étant supposé très petit, on peut négliger la seconde intégrale et écrire simplement

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \displaystyle\int \Bigg\{ \lambda\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \qquad + 2\mu\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \qquad + \mu\left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \right.\\ \qquad\qquad \left. +\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\Bigg\}\, dv. \end{cases}$$

On peut supposer que, dans le déplacement, chacune des masses élémentaires qui composent le système se déplace sans que son aimantation change de grandeur et de direction. Dès lors, si l'on se souvient que

$$\delta\, dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dv,$$

on trouve que le terme (2) du potentiel thermodynamique interne éprouve, dans le déplacement considéré, la variation suivante

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{B} = \displaystyle\int \Bigg\{ h\,\mathfrak{M}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+k\left(\mathfrak{A}^2\frac{\partial u}{\partial x}+\mathfrak{B}^2\frac{\partial v}{\partial y}+\mathfrak{C}^2\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \qquad + k\left[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\mathfrak{C}\mathfrak{A}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\Bigg\}\, dv \\ \quad + \displaystyle\int \Bigg\{ \left[f+h\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right)+k\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right]\mathfrak{A}^2 \\ \qquad + \left[f+h\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right)+k\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right]\mathfrak{B}^2 \\ \qquad + \left[f+h\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right)+k\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right]\mathfrak{C}^2 \\ \qquad\qquad + k\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right)\mathfrak{B}\mathfrak{C} \\ \qquad\qquad + k\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)\mathfrak{C}\mathfrak{A} \\ \qquad\qquad + k\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)\mathfrak{A}\mathfrak{B}\Bigg\}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dv. \end{cases}$$

Par un calcul identique à celui qui a été fait au Chapitre précé-

dent, on trouve que le terme (3) du potentiel thermodynamique interne subit, dans le déplacement considéré, la variation suivante

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{C} = -\int \Bigg\{ & \left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right] u \\ & + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y}\right] v \\ & + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right] w \Bigg\} dv \\ & - \mathrm{S} \left\| \mathcal{A}\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x} \right\| \cdot \| u \cos(\mathrm{N}_i, x) \| \, d\mathrm{S}, \end{aligned}\right.$$

N_i étant la normale à l'élément $d\mathrm{S}$ vers l'intérieur du corps solide considéré. Les lois de l'aimantation du corps [Livre X, Chap. IV, égalité (7)] permettraient de transformer cette expression ; mais nous lui laisserons provisoirement cette forme.

Pour obtenir les conditions d'équilibre du corps, nous écrirons que l'on a, en toute transformation virtuelle du système,

$$(8)\qquad \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - d\mathcal{F}_e \geqq 0.$$

Considérons tout d'abord une transformation dans laquelle chaque élément de volume se déplace sans changer de forme. On a alors, en tout point,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans ces conditions, on a certainement

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 0.$$

D'ailleurs, si les quantités u, v, w sont des fonctions continues de x, y, z, le corps ne se creuse pas de cavités; la modification est renversable, et la condition (8) devient

$$\mathrm{C} - d\mathcal{F}_e = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (4) et (7),

$$
\begin{aligned}
\int \Big\{ & \left[\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}+\rho X\right]u \\
&+\left[\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y}+\rho Y\right]v \\
&+\left[\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}+\rho Z\right]w \Big\}\,dv \\
+\mathrm{S}\Big\{ & \left[\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|\cos(N_i,x)+P\cos(P,x)\right]u \\
&+\left[\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|\cos(N_i,y)+P\cos(P,y)\right]v \\
&+\left[\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|\cos(N_i,z)+P\cos(P,z)\right]w \Big\}\,dS = 0.
\end{aligned}
$$

Cette égalité ne doit pas avoir lieu quels que soient u, v, w; elle doit seulement avoir lieu si u, v, w vérifient les conditions (9), il doit donc exister six fonctions de x, y, z, F_1, F_2, F_3; T_1, T_2, T_3, uniformes, finies et continues en tout point du corps considéré, telles que l'on ait, *quels que soient* u, v, w,

$$
(10)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\int \Big\{ & \left[\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}+\rho X\right]u \\
&+\left[\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y}+\rho Y\right]v \\
&+\left[\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}+\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}+\rho Z\right]w \Big\}\,dv \\
+\mathrm{S}\Big\{ & \left[\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|\cos(N_i,x)+P\cos(P,x)\right]u \\
&+\left[\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|\cos(N_i,y)+P\cos(P,y)\right]v \\
&+\left[\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|\cos(N_i,z)+P\cos(P,z)\right]w \Big\}\,dS \\
+\int & \left[F_1\frac{\partial u}{\partial x}+F_2\frac{\partial v}{\partial y}+F_3\frac{\partial w}{\partial z}+T_1\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right. \\
&\qquad\left.+T_2\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+T_3\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
(11)\quad
\left\{
\begin{aligned}
N_1 &= F_1-\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|,\\
N_2 &= F_2-\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|,\\
N_3 &= F_3-\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{U}+\mathfrak{V})}{\partial x}\right\|;
\end{aligned}
\right.
$$

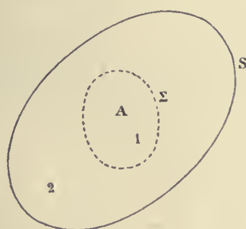
les trois quantités N_1, N_2, N_3 seront, comme F_1, F_2, F_3, trois fonctions de x, y, z, uniformes, finies et continues à l'intérieur du corps étudié. Une intégration par parties permettra de transformer l'égalité (10) en la suivante :

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \Big\{ \left[\rho X - \mathcal{A}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x^2} - \mathcal{B}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x\,\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z}\right] u \\ \quad + \left[\rho Y - \mathcal{A}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y\,\partial x} - \mathcal{B}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y^2} - \mathcal{C}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial T_3}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial T_1}{\partial z}\right] v \\ \quad + \left[\rho Z - \mathcal{A}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z\,\partial x} - \mathcal{B}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z\,\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial N_3}{\partial z}\right] w \Big\} dv \\ \mathrm{S} \Big\{ [P\cos(P,x) - N_1\cos(N_i,x) - T_3\cos(N_i,y) - T_2\cos(N_i,z)]\,u \\ \quad + [P\cos(P,y) - T_3\cos(N_i,x) - N_2\cos(N_i,y) - T_1\cos(N_i,z)]\,v \\ \quad + [P\cos(P,z) - T_2\cos(N_i,x) - T_1\cos(N_i,y) - N_3\cos(N_i,z)]\,w \Big\} dS = 0. \end{cases}$$

Telle est l'égalité qui doit avoir lieu quels que soient u, v, w.

Nous allons démontrer, en premier lieu, que le coefficient de u dans l'intégrale triple est égal à o en tout point intérieur au corps considéré. Supposons, en effet, que ce coefficient soit différent de o en un point A (*fig.* 30) intérieur au corps. Comme ce coefficient est une fonction continue de x, y, z, on pourrait tracer autour

Fig. 30.



du point A et à l'intérieur du corps un domaine 1, en tout point duquel ce coefficient aurait le même signe qu'au point A. Soit 2 ce qui reste du corps lorsqu'on supprime le domaine 1. On pourrait imposer au corps une transformation telle que l'on eût, en tout point de l'espace 1,

$$u > 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0$$

et, en tout point de l'espace 2,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

Le premier membre de l'égalité (12) se réduirait alors à

$$\int_1 \left[\rho X - \mathcal{A}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial x^2} - \mathcal{B}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial x\,\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z}\right] u\, dv.$$

Tous les éléments de cette intégrale auraient le même signe et, contrairement à l'égalité (12), cette intégrale ne pourrait être égale à o. Ainsi se trouve démontrée la première des égalités

$$(13)\quad\begin{cases} \rho X - \mathcal{A}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial x^2} - \mathcal{B}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial x\,\partial y} - \mathcal{C}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial x\,\partial z} = \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z}, \\ \rho Y - \mathcal{A}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial y\,\partial x} - \mathcal{B}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial y^2} - \mathcal{C}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z}, \\ \rho Z - \mathcal{A}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial z\,\partial x} - \mathcal{B}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial z\,\partial y} - \mathcal{C}\dfrac{\partial^2(\mathcal{V}+\mathcal{V})}{\partial z^2} = \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z}. \end{cases}$$

Les deux dernières se démontrent d'une manière analogue.

Ces égalités permettent d'effacer l'intégrale triple au premier membre de l'égalité (12); l'intégrale double que renferme ce premier membre doit alors être égale à o quels que soient u, v, w; on en conclut aisément que l'on doit avoir, en tout point de la surface du corps,

$$(14)\quad\begin{cases} P\cos(P, x) = N_1\cos(N_i, x) + T_3\cos(N_i, y) + T_2\cos(N_i, z), \\ P\cos(P, y) = T_3\cos(N_i, x) + N_2\cos(N_i, y) + T_1\cos(N_i, z), \\ P\cos(P, z) = T_2\cos(N_i, x) + T_1\cos(N_i, y) + N_3\cos(N_i, z). \end{cases}$$

En vertu des égalités (13) et (14), l'égalité (10) est identiquement satisfaite quels que soient u, v, w. La condition (8) devient donc, pour toute modification virtuelle renversable,

$$\begin{aligned} \int \Big\{ & h\mathfrak{M}^2 + \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) \\ & + \left[f + h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + k\frac{\partial U}{\partial x}\right]\mathcal{A}^2 \\ & + \left[f + h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + k\frac{\partial V}{\partial y}\right]\mathcal{B}^2 \\ & + \left[f + h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + k\frac{\partial W}{\partial z}\right]\mathcal{C}^2 \\ & + k\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)\mathcal{B}\mathcal{C} \\ & + k\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\mathcal{C}\mathcal{A} \\ & + k\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\mathcal{A}\mathcal{B}\Big\}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dv \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\left[2\mu\frac{\partial U}{\partial x}+\left\|\mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}')}{\partial x}\right\|+N_1+k\mathcal{A}^2\right]\frac{\partial u}{\partial x}\,dv\\
&+\int\left[2\mu\frac{\partial V}{\partial y}+\left\|\mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}')}{\partial x}\right\|+N_2+k\mathcal{B}^2\right]\frac{\partial v}{\partial y}\,dv\\
&+\int\left[2\mu\frac{\partial W}{\partial z}+\left\|\mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}')}{\partial x}\right\|+N_3+k\mathcal{C}^2\right]\frac{\partial w}{\partial z}\,dv\\
&+\int\left[\mu\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)+T_1+k\mathcal{B}\mathcal{C}\right]\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)dv\\
&+\int\left[\mu\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)+T_2+k\mathcal{C}\mathcal{A}\right]\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)dv\\
&+\int\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)+T_3+k\mathcal{A}\mathcal{B}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv=0.
\end{aligned}
$$

Posons, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
\psi=&\left[f+h\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right]\mathcal{M}^2+k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathcal{A}^2+\frac{\partial V}{\partial y}\mathcal{B}^2+\frac{\partial W}{\partial z}\mathcal{C}^2\right)\\
&+k\left[\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)\mathcal{B}\mathcal{C}+\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)\mathcal{C}\mathcal{A}+\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\mathcal{A}\mathcal{B}\right].
\end{aligned}
$$

Une intégration par parties transformera l'égalité précédente en la suivante :

$$
\begin{aligned}
\int\Bigg\{&h\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial x}+\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial x}\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial U}{\partial x}+\left\|\mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}')}{\partial x}\right\|+N_1+k\mathcal{A}^2\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)+T_3+k\mathcal{A}\mathcal{B}\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)+T_2+k\mathcal{A}\mathcal{C}\right]\Bigg\}u\,dv\\
+\int\Bigg\{&h\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial y}+\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial V}{\partial y}+\left\|\mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathfrak{V}')}{\partial x}\right\|+N_2+k\mathcal{B}^2\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)+T_1+k\mathcal{B}\mathcal{C}\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)+T_3+k\mathcal{B}\mathcal{A}\right]\Bigg\}v\,dv
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int \Bigg\{ h\,\frac{\partial \mathcal{M}^2}{\partial z} + \lambda\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\,\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} + \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x} \right\| + \mathrm{N}_3 + k\,\mathcal{C}^2\right] \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right) + \mathrm{T}_2 + k\,\mathcal{C}\mathcal{A}\right] \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right) + \mathrm{T}_1 + k\,\mathcal{C}\mathcal{B}\right] \Bigg\}\, w\, dv \\
&+ \mathrm{S}\Bigg\{ \left[h\,\mathcal{M}^2 + \lambda\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right) + \psi \right. \\
&\qquad \left. + 2\mu\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathcal{V})}{\partial x} \right\| + \mathrm{N}_1 + k\,\mathcal{A}^2\right] \cos(\mathrm{N}_i, x) \\
&\qquad + \left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right) + \mathrm{T}_3 + k\,\mathcal{A}\mathcal{B}\right] \cos(\mathrm{N}_i, y) \\
&\qquad + \left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right) + \mathrm{T}_2 + k\,\mathcal{A}\mathcal{C}\right] \cos(\mathrm{N}_i, z) \Bigg\}\, u\, d\mathrm{S} \\
&+ \mathrm{S}\Bigg\{ \left[h\,\mathcal{M}^2 + \lambda\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right) + \psi \right. \\
&\qquad \left. + 2\mu\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x} \right\| + \mathrm{N}_2 + k\,\mathcal{B}^2\right] \cos(\mathrm{N}_i, y) \\
&\qquad + \left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right) + \mathrm{T}_1 + k\,\mathcal{B}\mathcal{C}\right] \cos(\mathrm{N}_i, z) \\
&\qquad + \left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right) + \mathrm{T}_3 + k\,\mathcal{B}\mathcal{A}\right] \cos(\mathrm{N}_i, x) \Bigg\}\, v\, d\mathrm{S} \\
&+ \mathrm{S}\Bigg\{ \left[h\,\mathcal{M}^2 + \lambda\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right) + \psi \right. \\
&\qquad \left. + 2\mu\,\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} + \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x} \right\| + \mathrm{N}_3 + k\,\mathcal{C}^2\right] \cos(\mathrm{N}_i, z) \\
&\qquad + \left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right) + \mathrm{T}_2 + k\,\mathcal{C}\mathcal{A}\right] \cos(\mathrm{N}_i, x) \\
&\qquad + \left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right) + \mathrm{T}_1 + k\,\mathcal{C}\mathcal{B}\right] \cos(\mathrm{N}_i, y) \Bigg\}\, w\, d\mathrm{S} = 0.
\end{aligned}
$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient u, v, w. Par un raisonnement analogue à celui que nous avons appliqué à l'égalité (12), nous prouverons qu'il est nécessaire et suffisant pour cela que l'on ait :

1° En tout point intérieur au solide polarisé, l'égalité

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
&\quad + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) \\
&\quad = -\frac{\partial}{\partial x}\left[N_1 + \left\| \mathcal{A} \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x} \right\| + \psi + h\mathfrak{M}^2 + k\mathcal{A}^2\right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y}(T_3 + k\mathcal{A}\mathcal{B}) - \frac{\partial}{\partial z}(T_2 + k\mathcal{A}\mathcal{C}),
\end{aligned}
\right.
$$

et deux autres égalités analogues;

2° En tout point de la surface du corps considéré, l'égalité

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x}\right] \cos(N_i, x) \\
&\quad + \mu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cos(N_i, y) + \mu\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cos(N_i, z) \\
&\quad = -\left[N_1 + \left\| \mathcal{A} \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x} \right\| + \psi + h\mathfrak{M}^2 + k\mathcal{A}^2\right] \cos(N_i, x) \\
&\quad - (T_3 + k\mathcal{A}\mathcal{B}) \cos(N_i, y) - (T_2 + k\mathcal{A}\mathcal{C}) \cos(N_i, z) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

et deux autres égalités analogues.

Les égalités (13), (14), (15) et (16), jointes aux conditions de l'équilibre magnétique [Livre X, Chap. IV, équations (7)], fournissent les conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du corps polarisé. Il nous reste à discuter les conséquences de ces équations.

§ 2. — Pressions à l'intérieur d'un solide primitivement isotrope, peu déformé et polarisé.

Considérons un solide polarisé en équilibre. Il existe six fonctions uniformes, finies, continues de x, y, z,

$$N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3,$$

qui vérifient les équations (13) en tout point de ce solide et les équations (14) en tout point de sa surface.

Traçons dans ce solide une surface Σ qui, soit seule (*fig.* 31), soit avec une portion S_1 de la surface S (*fig.* 32), isole une partie A du corps solide. Désignons par B ce qui reste de ce corps lorsqu'on a supprimé la partie A.

Définissons, comme au Chapitre précédent, les aimants qui pour la partie A seraient équivalents à la partie B.

Supprimons la partie B sans rien changer à l'état de déformation de la partie A et en laissant cette partie A soumise :

1° A l'action des forces extérieures qui agissaient sur elle;

2° A l'action des aimants qui agissaient sur le solide primitif;

3° A l'action des aimants équivalents à la partie B.

Fig. 31.

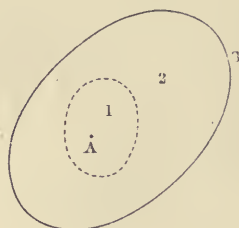
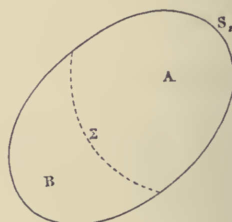


Fig. 32.



Il est facile de voir que l'aimantation de la partie A demeure ce qu'elle était avant la suppression de la partie B; que, d'autre part, les déplacements de la partie A ne sont plus soumis aux liaisons que leur imposait la présence de la partie B; mais que, pour rétablir l'équilibre de la partie A, il suffit d'appliquer à la surface Σ des pressions convenablement choisies; la grandeur et la direction de la pression en chaque point de la surface Σ sont données par les équations

$$(14)\quad \begin{cases} P\cos(P, x) = N_1 \cos(N_i, x) + T_3 \cos(N_i, y) + T_2 \cos(N_i, z), \\ P\cos(P, y) = T_3 \cos(N_i, x) + N_2 \cos(N_i, y) + T_1 \cos(N_i, z), \\ P\cos(P, z) = T_2 \cos(N_i, x) + T_1 \cos(N_i, y) + N_3 \cos(N_i, z). \end{cases}$$

Dans ces équations, N_i représente la direction de la normale à l'élément $d\Sigma$ en un point duquel on veut déterminer la pression, cette normale étant orientée vers l'intérieur de la partie A.

La grandeur et la direction de la pression sont ainsi définies en tout point du corps et pour toute orientation de l'élément passant par ce point, en fonction des six quantités

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3,\quad T_1,\quad T_2,\quad T_3.$$

Aussi dirons-nous que connaître les valeurs de ces six quantités

au point (x, y, z) du corps, c'est connaître les *pressions* en ce point.

Nous ne nous attarderons pas ici à étudier les belles conséquences que Cauchy et Lamé ont déduites des équations (14). On les trouvera exposées dans tous les Traités d'Élasticité; elles ne sont pas essentielles au développement de la théorie qui nous occupe.

§ 3. — Pressions fictives à l'intérieur du solide polarisé.

Supposons que l'on se donne l'état d'aimantation du corps et les valeurs que prennent, en tout point du corps, les six quantités

$$N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3.$$

La déformation du corps sera déterminée par les égalités (15) et (16).

Si le corps n'était pas aimanté, ces égalités seraient de la forme suivante

$$(15\,bis) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ & \qquad + \mu \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] \\ & \quad = -\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\right), \end{aligned} \right.$$

$$(16\,bis) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x}\right] \cos(N_i, x) \\ & \qquad + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cos(N_i, y) + \mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cos(N_i, z) \\ & \quad = -[N_1 \cos(N_i, x) + T_3 \cos(N_i, y) + T_2 \cos(N_i, z)]. \end{aligned} \right.$$

Ces équations et les équations analogues que l'on en déduit par des permutations tournantes déterminent les déformations du solide non polarisé en fonction des pressions; elles jouent le même rôle, dans l'étude de la déformation des solides élastiques et primitivement isotropes, que l'équation de compressibilité dans l'étude des fluides.

Si l'on compare les égalités (15) et (16) aux égalités (15 *bis*) et (16 *bis*), on arrive aux conclusions suivantes :

On peut, dans un solide polarisé, donner aux équations qui

lient les déformations aux pressions la forme qu'elles ont pour un solide non polarisé, mais à la condition de remplacer les valeurs réelles des six quantités

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3,\quad T_1,\quad T_2,\quad T_3,$$

par des valeurs fictives

$$N'_1,\quad N'_2,\quad N'_3,\quad T'_1,\quad T'_2,\quad T'_3,$$

liées aux premières par les relations

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} N'_1 &= N_1 + \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial x} \right\| + \psi + h\,\mathcal{M}^2 + k\,\mathcal{A}^2,\\ N'_2 &= N_2 + \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial x} \right\| + \psi + h\,\mathcal{M}^2 + k\,\mathcal{B}^2,\\ N'_3 &= N_3 + \left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial x} \right\| + \psi + h\,\mathcal{M}^2 + k\,\mathcal{C}^2,\\ T'_1 &= T_1 + k\,\mathcal{B}\mathcal{C},\\ T'_2 &= T_2 + k\,\mathcal{C}\mathcal{A},\\ T'_3 &= T_3 + k\,\mathcal{A}\mathcal{B}. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (17) peuvent se transformer. Si l'on se reporte, en effet, aux lois de l'équilibre magnétique [Livre X, Chap. IV, équations (7)], on voit qu'on a

$$\left\| \mathcal{A}\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial x} \right\| = -\,2\psi.$$

Les égalités (17) deviennent donc

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} N'_1 &= N_1 - \psi + h\,\mathcal{M}^2 + k\,\mathcal{A}^2,\\ N'_2 &= N_2 - \psi + h\,\mathcal{M}^2 + k\,\mathcal{B}^2,\\ N'_3 &= N_3 - \psi + h\,\mathcal{M}^2 + k\,\mathcal{C}^2,\\ T'_1 &= T_1 + k\,\mathcal{B}\mathcal{C},\\ T'_2 &= T_2 + k\,\mathcal{C}\mathcal{A},\\ T'_3 &= T_3 + k\,\mathcal{A}\mathcal{B}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on se reporte à l'expression de ψ,

$$\begin{aligned} \psi = \left[f + h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\right]\mathcal{M}^2 + k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\mathcal{A}^2 + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathcal{B}^2 + \frac{\partial W}{\partial z}\,\mathcal{C}^2\right)\\ + 2k\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\mathcal{B}\mathcal{C} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\mathcal{C}\mathcal{A} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\mathcal{A}\mathcal{B}\right]. \end{aligned}$$

et si l'on remarque que les quantités

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ldots$$

sont très petites, on peut faire subir aux équations (18) une nouvelle simplification et les écrire

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} N'_1 &= N_1 - (f - h)\mathfrak{M}^2 + k\mathfrak{A}^2, \\ N'_2 &= N_2 - (f - h)\mathfrak{M}^2 + k\mathfrak{B}^2, \\ N'_3 &= N_3 - (f - h)\mathfrak{M}^2 + k\mathfrak{C}^2, \\ T'_1 &= T_1 + k\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \\ T'_2 &= T_2 + k\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \\ T'_3 &= T_3 + k\mathfrak{A}\mathfrak{B}. \end{aligned} \right.$$

Un cas intéressant est celui où *l'on regarde les deux quantités h et k comme très petites devant f.* Dans ce cas, si l'on se reporte aux équations de l'équilibre magnétique [Livre X, Chap. IV, équations (7)], on voit qu'une déformation du premier ordre imposée au solide ne modifie les coefficients d'aimantation que de quantités du second ordre.

Dans ce cas, les équations (19) se réduisent à

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} N'_1 &= N_1 + f\mathfrak{M}^2, \quad & N'_2 &= N_2 + f\mathfrak{M}^2, \quad & N'_3 &= N_3 + f\mathfrak{M}^2, \\ T'_1 &= T_1, & T'_2 &= T_2, & T'_3 &= T_3. \end{aligned} \right.$$

Si l'on se reporte alors aux équations (14), qui définissent la pression exercée sur un élément quelconque dS passant par le point (x, y, z), on voit que la substitution des quantités

$$N'_1, \quad N'_2, \quad N'_3, \quad T'_1, \quad T'_2, \quad T'_3,$$

données par les égalités (20) aux quantités

$$N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3,$$

équivaut à l'addition d'une pression fictive, normale à l'élément dS, à la pression que cet élément supporte en réalité. Cette pression, indépendante de l'orientation de l'élément, a pour valeur

$$(21) \qquad \Pi = -f\mathfrak{M}^2\, dS.$$

Cette pression est négative, car la quantité f est positive; $\frac{1}{2f}$ est, en effet, le coefficient d'aimantation du corps non déformé.

La pression fictive additionnelle est négative en tout point

du corps polarisé; elle est égale au quotient du carré de l'intensité d'aimantation par le double du coefficient d'aimantation du corps non déformé.

Lorsqu'on néglige devant f les quantités h et k, et, *a fortiori*, les quantités

$$h\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ldots, \quad k\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ldots,$$

on a

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2f}\left\{\left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial z}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

et l'égalité (21) peut encore s'écrire

$$(21\ bis)\qquad \Pi = -\frac{1}{4f}\left\{\left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{dz}\right]^2\right\} dS.$$

Si le corps est peu magnétique, $\mathfrak{V}$ est négligeable devant $\mathcal{V}$. Si l'on désigne alors par I l'intensité du champ, la formule (21 *bis*) deviendra

$$(21\ ter)\qquad \Pi = -\frac{I^2}{4f}\,dS.$$

*La pression additionnelle a pour valeur absolue, en tout point de l'élément d*S, *le quotient du carré de l'intensité du champ par le double du coefficient d'aimantation du corps.* Cette loi simple n'est qu'une approximation.

§ 4. — Déformations du solide polarisé.

Si, entre les équations (13) et (15), on élimine les six fonctions

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3,\quad T_1,\quad T_2,\quad T_3,$$

on obtient les équations suivantes, qui doivent être vérifiées en tout point (x, y, z) du solide

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\\ &\quad+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial x}\left\|\mathcal{A}\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial x}\right\|-\mathcal{A}\frac{\partial^2(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial x^2}-\mathcal{B}\frac{\partial^2(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial x\,\partial y}-\mathcal{C}\frac{\partial^2(\mathfrak{V}+\mathcal{V})}{\partial x\,\partial z}\\ &\qquad+\frac{\partial}{\partial x}[\psi+h\mathfrak{M}^2+k\mathcal{A}^2]+k\frac{\partial(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\partial z}+k\frac{\partial(\mathcal{A}\mathcal{C})}{\partial y}+\rho X=0,\\ &\text{et deux autres analogues.}\end{aligned}\right.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\| \mathcal{A}\frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x}\right\| - \mathcal{A}\frac{\partial^2(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x^2} - \mathcal{B}\frac{\partial^2(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x\,\partial y} - \mathcal{C}\frac{\partial^2(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x\,\partial z}$$
$$= \frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}.$$

Les conditions de l'équilibre magnétique [Livre X, Chap. IV, égalités (7)] donnent ensuite

$$\frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}$$
$$= -\left[f + h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial x}$$
$$- k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}^2}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}^2}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}^2}{\partial x}\right)$$
$$- 2k\left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)\frac{\partial(\mathcal{B}\mathcal{C})}{\partial x} + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial(\mathcal{C}\mathcal{A})}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\partial x}\right]$$
$$= -\frac{\partial\psi}{\partial x} + h\mathcal{M}^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)$$
$$+ k\left(\mathcal{A}^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mathcal{B}^2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{C}^2\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}\right)$$
$$+ 2k\left[\mathcal{B}\mathcal{C}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \mathcal{C}\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \mathcal{A}\mathcal{B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right].$$

D'après ces égalités et d'autres analogues, les égalités (22) deviendront

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned} &(\lambda + h\mathcal{M}^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\\ &\quad + (2\mu + k\mathcal{A}^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k\mathcal{B}^2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + k\mathcal{C}^2\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}\\ &\quad + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\\ &+ 2k\left[\mathcal{B}\mathcal{C}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) + \mathcal{C}\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \mathcal{A}\mathcal{B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]\\ &\qquad + h\frac{\partial\mathcal{M}^2}{\partial x} + k\left(\frac{\partial\mathcal{A}^2}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{A}\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{A}\mathcal{C}}{\partial z}\right) + \rho X = 0,\\ &\text{et deux autres analogues.}\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine les six quantités

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3,\quad T_1,\quad T_2,\quad T_3$$

entre les équations (14) et (16), en se souvenant que

$$\left\| \mathcal{A} \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{V})}{\partial x} \right\| = -2\psi,$$

on obtient les équations suivantes, qui doivent être vérifiées en tout point de la surface du solide,

$$(24)\left\{\begin{aligned} &\left[\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x} + \psi + h\mathcal{M}^2 + k\mathcal{A}^2\right]\cos(N_i, x) \\ &\qquad + \left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + k\mathcal{A}\mathcal{B}\right]\cos(N_i, y) \\ &\qquad + \left[\mu\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) + k\mathcal{A}\mathcal{C}\right]\cos(N_i, z) + P\cos(P, x) = 0 \\ &\text{et deux autres analogues.} \end{aligned}\right.$$

Les équations (23) représentent les équations aux dérivées partielles du second ordre que doivent vérifier les déplacements U, V, W et les équations (24), les conditions aux limites que ces mêmes déplacements vérifient. L'intégration de l'ensemble de ces équations et des équations de l'équilibre magnétique résoudra le problème général de la déformation d'un solide polarisable placé dans des conditions déterminées.

Ce problème présentera, en général, d'insurmontables difficultés. Toutefois, il est possible de le résoudre dans un cas qui, bien que particulier, offre un grand intérêt et jette un grand jour sur les actions magnétiques.

Considérons un corps qui, à l'état naturel, est isotrope et n'est soumis à aucune force extérieure ni à aucune pression. Ce corps est sphérique. On le place dans un champ magnétique uniforme. Nous allons démontrer qu'il se dilate de la même manière en tous ses points de manière à se transformer en un ellipsoïde de révolution dont l'axe de révolution est dirigé suivant les lignes de force du champ.

Prouvons, en effet, qu'il existe une semblable déformation satisfaisant aux conditions de l'équilibre magnétique et aux équations (23) et (24).

En premier lieu, l'ellipsoïde est homogène; ses axes ne diffèrent les uns des autres que de quantités de l'ordre de $\frac{\partial U}{\partial x}$; ses coefficients

principaux d'aimantation ne diffèrent aussi les uns des autres que de quantités de l'ordre de $\frac{\partial U}{\partial x}$. Les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ne varient donc, d'un point à l'autre du corps, que de quantités de l'ordre de $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$, ainsi qu'on le voit aisément. Comme on néglige les quantités de cet ordre, l'aimantation de notre corps devra être regardée comme uniforme. Par raison de symétrie elle coïncidera avec l'axe de révolution de l'ellipsoïde qui est dirigé suivant les lignes de force du champ.

Plaçons l'axe des x suivant la direction de l'aimantation. Nous aurons alors

$$(25)\quad \begin{cases} \mathcal{B} = 0, \qquad \mathcal{C} = 0, \qquad \mathcal{A} = \mathfrak{M}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial W}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

L'aimantation et la déformation étant uniformes, les forces extérieures étant nulles, les équations (23) sont identiquement satisfaites. Les équations (24) se réduisent, moyennant les équations (25), à

$$(26)\quad \begin{cases} [\lambda + 2\mu - (h+k)\mathfrak{M}^2]\dfrac{\partial U}{\partial x} + 2(\lambda - h\mathfrak{M}^2)\dfrac{\partial V}{\partial y} + (f + h + k)\mathfrak{M}^2 = 0, \\ [\lambda - (h+k)\mathfrak{M}^2]\dfrac{\partial U}{\partial x} + 2(\lambda + \mu - h\mathfrak{M}^2)\dfrac{\partial V}{\partial y} + (f + h)\mathfrak{M}^2 = 0. \end{cases}$$

On satisfera à ces équations (26) en posant

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{k(\lambda+\mu) - (f+h)\mu - kh\mathfrak{M}^2}{\mu[3\lambda + 2\mu - (3+k)\mathfrak{M}^2]}\mathfrak{M}^2, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial W}{\partial z} = -\dfrac{k\lambda - 2\mu(f+h) - k(h+k)\mathfrak{M}^2}{2\mu[3\lambda + 2\mu - (3h+k)\mathfrak{M}^2]}\mathfrak{M}^2. \end{cases}$$

Ces égalités (27) définissent la déformation de la sphère. Dans le cas particulier, déjà étudié au paragraphe précédent, où l'on néglige les quantités h et k devant les quantités λ, μ et f, on trouve

$$(28)\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{f\mathfrak{M}^2}{3\lambda + 2\mu}.$$

La quantité

$$c = \frac{1}{2f}$$

est le coefficient d'aimantation du corps à l'état naturel.

La quantité

$$C = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$$

est le coefficient de compressibilité cubique du corps. La formule (28) permet alors d'écrire

$$(29) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{C\mathfrak{M}^2}{2c}.$$

Si l'on néglige les quantités h et k, une sphère magnétique, placée dans un champ magnétique uniforme, se dilate en restant semblable à elle-même. La dilatation cubique s'obtient en multipliant le carré de l'intensité d'aimantation par le coefficient de compressibilité cubique du corps et en divisant par le double du coefficient d'aimantation.

Si l'on désigne par J l'intensité du champ, on aura [Livre VIII, Chap. II, égalité (7)]

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{c^2}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi c\right)^2} J^2,$$

et l'égalité (29) pourra aussi s'écrire

$$(30) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{C}{2} \frac{cJ^2}{\left(1 + \frac{4}{3}\pi c\right)^2}.$$

Ces résultats peuvent être étendus à un corps de forme quelconque placé dans un champ magnétique uniforme, pourvu que ce corps soit faiblement magnétique et que l'on néglige les quantités h et k devant f. *Ce corps se dilatera uniformément en tout sens, et la dilatation cubique aura pour valeur*

$$(31) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{CcJ^2}{2}.$$

§ 5. — Comparaison des résultats de la théorie aux résultats de l'expérience.

La théorie précédente s'applique également aux corps diélectriques et aux corps magnétiques. Toutefois, lorsqu'on l'applique à un corps diélectrique, on doit avoir soin de s'assurer que ce corps ne porte aucune charge électrique et que ses déformations virtuelles ne sont pas liées à des déplacements des corps électrisés; cette restriction ne serait pas réalisée par une lame diélectrique à laquelle seraient collées les deux armatures d'un condensateur.

La dilatation que subit un diélectrique placé dans un champ électrique est connue depuis bien longtemps. L'abbé Fontana ([1]) avait déjà observé que le volume d'un condensateur augmente quand on le charge. Cette découverte était tombée dans l'oubli quand le fait qu'elle avait constaté fut signalé de nouveau par M. Govi ([2]), puis étudié successivement par M. Duter ([3]), par M. Righi ([4]) et par M. Quincke ([5]).

Imaginons une lame diélectrique placée entre les deux plateaux d'un condensateur, et *non fixée à ces plateaux,* condition rarement réalisée dans les expériences et dont l'oubli cause peut-être les divergences qui existent entre leurs résultats. Si l'on désigne par V et V′ les niveaux potentiels des deux armatures, par Δ leur distance, d'après la formule (31), la dilatation cubique de la lame diélectrique a pour valeur

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \varepsilon C c \frac{(V' - V)^2}{\Delta^2}.$$

Elle est proportionnelle au carré de la différence de niveau

([1]) Cité dans une lettre de Volta au professeur Landriani (*Lettere inedite de Alessandro Volta,* imprimées à Pesaro en 1831, p. 15 et sqq.).

([2]) Govi, *Nuovo Cimento,* t. XXI et XXII. — *Comptes rendus,* t. LXXXVII, p. 857; 1878.

([3]) Duter, *De la dilatation électrique des armatures des bouteilles de Leyde* (*Comptes rendus,* t. LXXXVIII, p. 1260; 1879).

([4]) Righi, *Sur la dilatation du verre des condensateurs pendant la charge* (*Comptes rendus,* t. LXXXVIII, p. 1262; 1879).

([5]) Quincke, *Ueber elektrische Ausdehnung* (*Monatsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin,* p. 200; 1880).

potentiel des deux armatures et en raison inverse du carré de leur distance.

C'est le résultat trouvé par M. Quincke. M. Duter et M. Righi ont observé une dilatation proportionnelle à l'inverse de la simple distance. Dans les expériences de ces physiciens, la lame isolante n'était pas indépendante des armatures, ce qui explique peut-être cette divergence.



CHAPITRE III.

LA THÉORIE DE MAXWELL.

§ 1. — Historique de la théorie des pressions à l'intérieur des corps polarisés.

Le premier auteur qui ait cherché à préciser la nature des pressions qui s'exercent à l'intérieur d'un corps polarisé est Maxwell. Les propositions les plus importantes de sa théorie furent publiées en 1861-1862 dans le *Philosophical Magazine* ([1]) et en 1865 dans les *Philosophical Transactions* ([2]). Cette théorie fut plus tard développée dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* dont la première édition parut en 1873 ([3]).

La théorie de Maxwell a été accueillie par les physiciens comme une œuvre de génie; elle est regardée comme une des théories les plus importantes de la Physique moderne.

Les propositions qui constituent cette théorie peuvent se ramener aux deux suivantes :

1° Si, à l'intérieur d'un milieu polarisé, solide ou fluide, on trace une surface séparant une partie de ce milieu et qu'on supprime les liaisons résultant de la présence de l'autre partie, on rétablira l'équilibre en appliquant des pressions à cette surface. Si l'on désigne par N_i la normale à cette surface en un point (x, y, z), cette normale étant dirigée vers l'intérieur de la portion de corps qu'elle limite, la grandeur et la direction de la pression au

([1]) J.-C. Maxwell, *On electromagnetic field.*

([2]) J.-C. Maxwell, *On electromagnetic field* (*Philosophical Transactions of the royal Society of London;* 1865).

([3]) Ire Partie, Chap. V; IVe Partie, Chap. XI.

point (x, y, z) sont données par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} P\cos(P, x) &= N_1 \cos(N_i, x) + T_3 \cos(N_i, y) + T_2 \cos(N_i, z),\\ P\cos(P, y) &= T_3 \cos(N_i, x) + N_2 \cos(N_i, y) + T_1 \cos(N_i, z),\\ P\cos(P, z) &= T_2 \cos(N_i, x) + T_1 \cos(N_i, y) + N_3 \cos(N_i, z),\end{aligned}\right.$$

équations dans lesquelles

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3,\quad T_1,\quad T_2,\quad T_3$$

sont six fonctions de (x, y, z) définies par les égalités suivantes :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\left[\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial x}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\Pi(\mathcal{U} + \mathcal{V}),\\ N_2 &= \left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\left[\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial y}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\Pi(\mathcal{U} + \mathcal{V}),\\ N_3 &= \left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\left[\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial z}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\Pi(\mathcal{U} + \mathcal{V}),\\ T_1 &= \left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial y}\,\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial z},\\ T_2 &= \left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial z}\,\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial x},\\ T_3 &= \left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial x}\,\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, k est le coefficient d'aimantation de la substance, coefficient supposé invariable. De plus on a, suivant la notation que nous avons adoptée,

$$\Pi(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \left[\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\mathcal{U} + \mathcal{V})}{\partial z}\right]^2.$$

2° Les déformations du milieu polarisé sont liées aux six quantités

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3,\quad T_1,\quad T_2,\quad T_3,$$

par les relations établies par la théorie de l'élasticité pour le cas où le milieu n'est pas polarisé.

Pour nous imaginer plus aisément les lois qui, d'après Maxwell, régissent les pressions à l'intérieur d'un solide polarisé, prenons

l'axe des y et l'axe des z tangents à la surface de niveau qui passe par le point (x, y, z). Nous aurons alors

$$\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial z} = 0,$$

et les égalités (2) deviendront

$$N_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\left[\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial x}\right]^2,$$

$$N_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\left[\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial x}\right]^2,$$

$$N_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\left[\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial x}\right]^2,$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

On voit d'abord par les équations (1) qu'un élément superficiel normal à la ligne de force qui passe en un point du corps supporte une *pression normale* qui a pour valeur en chacun de ses points

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\left[\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial x}\right]^2,$$

tandis qu'un élément parallèle à la ligne de force supporte une *traction normale* dont la valeur absolue en chaque point est égale à la valeur de la pression précédente.

Les déformations étant liées aux pressions, au sein du milieu polarisé, de la même manière qu'au sein du milieu soustrait à l'action de tout champ, on voit que le corps éprouve, en chaque point, une contraction dans le sens des lignes de force et une dilatation, égale en valeur absolue à cette contraction, dans toute direction normale aux lignes de force.

Ces pressions et tensions ne deviennent pas égales à o en même temps que le coefficient k. Si l'on place dans un champ magnétique un corps non susceptible de s'aimanter, tout élément superficiel pris à l'intérieur de ce corps, normalement aux lignes de force du champ, supporte une pression normale qui a pour valeur en tout point

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}\right)^2,$$

tandis que tout élément parallèle aux lignes de force supporte une tension normale qui a, en tout point, la même valeur absolue que la pression précédente.

Maxwell avait supposé la valeur du coefficient d'aimantation k indépendante des déformations subies par le corps. M. H. von Helmholtz ([1]) remarqua que, dans les fluides, ce coefficient devait être regardé comme étant, en chaque point, une fonction $k(\sigma)$ du volume spécifique σ. Il fut alors amené à remplacer les égalités (2) données par Maxwell par les égalités suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
N_1 &= \left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial x}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma) + \sigma\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mathcal{V}+\mathcal{Q}),\\
N_2 &= \left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial y}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma) + \sigma\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mathcal{V}+\mathcal{Q}),\\
N_3 &= \left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial z}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma) + \sigma\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mathcal{V}+\mathcal{Q}),\\
T_1 &= \left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial y}\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial z},\\
T_2 &= \left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial z}\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial x},\\
T_3 &= \left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial x}\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{Q})}{\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

La théorie de M. H. von Helmholtz conduit à admettre que tout élément superficiel, tracé à l'intérieur d'un solide polarisé, supporte, outre la pression donnée par la théorie de Maxwell, une pression normale dont la valeur en chaque point, indépendante de l'orientation de l'élément, est

$$-\frac{1}{2}\sigma\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\Pi(\mathcal{V}+\mathcal{Q}).$$

Cette force disparaît si, avec Maxwell, on suppose que le coefficient d'aimantation k ne dépend pas du volume spécifique σ.

([1]) H. VON HELMHOLTZ, *Ueber die auf das Innere magnetisch oder diëlektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte* (*Monatsber. der Berl. Akademie,* 17 février 1881. — *Wiedeman's Annalen,* t. XIII, p. 385; 1881. — *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen,* t. I, p. 798).

Dans le cas où le corps soumis à la polarisation est un solide primitivement isotrope, les déformations de ce solide influent sur les lois de l'aimantation ; k ne peut être regardé comme une constante, et il y a lieu de compléter les formules de Maxwell. C'est ce qu'ont fait M. Lorberg (1) et G. Kirchhoff (2). Avant eux, M. Korteweg (3) avait déjà montré que trois constantes distinctes s'introduisent dans les formules relatives aux solides polarisés. Depuis, M. E. Beltrami (4) a donné des formules qui conduisent aisément aux résultats obtenus par M. H. von Helmholtz et par G. Kirchhoff.

Pour pouvoir écrire ici les formules auxquelles ces auteurs sont parvenus, considérons les lois de l'aimantation par influence sur un solide primitivement isotrope peu déformé [Livre X, Chap. IV, équations (7)]. Après avoir introduit dans les équations qui représentent ces lois les notations dont il est fait usage au présent Livre, résolvons ces équations par rapport à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Ces équations prendront la forme suivante

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\left[a_{11}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial z}\right],\\ \mathcal{B} &= -\left[a_{21}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial y}\right],\\ \mathcal{C} &= -\left[a_{31}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathcal{V})}{\partial z}\right], \end{aligned}\right.$$

---

(1) LORBERG, *Ueber Elektrostriction* (*Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, t. XXI, p. 300; 1884).

(2) G. KIRCHHOFF, *Ueber die Formänderung die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisirt wird* (*Sitzungsberichte der Berl. Akad. d. Wiss.*, t. I, p. 137; 1884. — *Wiedemann's Annalen*, t. XXIV, p. 52; 1885. — *G. Kirchhoff's Abhandlungen; Nachtrag*, p. 91). — — *Ueber einige Anwendungen der Theorie der Formänderungen welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird* (*Sitzungsberichte der Berl. Akad. d. Wiss.*, t. II, p. 1155; 1884. — *Wiedemann's Annalen*, t. XXV, p. 601; 1885. — *G. Kirchhoff's Abhandlungen; Nachtrag*, p. 114).

(3) D.-J. KORTEWEG, *Ueber die Veränderung der Form und des Volumens diëlektrischer Körper unter Einwirkung elektrischer Kräfte* (*Wiedemann's Annalen*, t. IX, p. 48; 1880).

(4) E. BELTRAMI, *Sulla representazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche* (*Rendiconti del R. Instituto Lombardo*, série II, vol. XVI; séance du 19 juin 1884).

équations dans lesquelles on aura

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
a_{11} &= \mathrm{K} - \mathrm{K}'\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right) - \mathrm{K}''\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x},\\
a_{22} &= \mathrm{K} - \mathrm{K}'\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right) - \mathrm{K}''\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y},\\
a_{33} &= \mathrm{K} - \mathrm{K}'\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right) - \mathrm{K}''\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z},\\
a_{23} &= a_{32} = -\frac{\mathrm{K}''}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right),\\
a_{31} &= a_{13} = -\frac{\mathrm{K}''}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right),\\
a_{12} &= a_{21} = -\frac{\mathrm{K}''}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right.$$

K, K′, K″ étant trois constantes liées aux trois constantes f, h, k par des relations qu'il est inutile d'écrire ici.

La constante K est le coefficient d'aimantation du corps non déformé; elle est donc égale à $\frac{1}{2f}$.

Si l'on suppose $k = 0$, on a aussi $\mathrm{K}'' = 0$.

Si l'on suppose, en outre, $h = 0$, on trouve $\mathrm{K}' = 0$.

MM. Lorberg et G. Kirchhoff ont trouvé qu'à l'intérieur d'un solide élastique polarisé les équations (2) de Maxwell devaient être remplacées par des équations plus compliquées. Moyennant les notations que nous venons d'introduire, ces équations peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{N}_1 &= \left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}''}{2}\right)\left[\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial x}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} - \mathrm{K}'\right)\Pi(\mho + \vartheta),\\
\mathrm{N}_2 &= \left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}''}{2}\right)\left[\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial y}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} - \mathrm{K}'\right)\Pi(\mho + \vartheta),\\
\mathrm{N}_3 &= \left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}''}{2}\right)\left[\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial z}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} - \mathrm{K}'\right)\Pi(\mho + \vartheta),\\
\mathrm{T}_1 &= \left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}''}{2}\right)\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial y}\,\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial z},\\
\mathrm{T}_2 &= \left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}''}{2}\right)\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial z}\,\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial x},\\
\mathrm{T}_3 &= \left(\frac{1}{4\pi} + \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}''}{2}\right)\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial x}\,\frac{\partial(\mho + \vartheta)}{\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations se ramènent à celles de M. H. von Helmholtz, si l'on y fait

$$K'' = 0$$

et à celles de Maxwell, si l'on suppose à la fois

$$K'' = 0, \qquad K' = 0,$$

c'est-à-dire

(7) $$k = 0, \qquad h = 0.$$

Cette théorie, fondée par Maxwell, développée par M. H. von Helmholtz, M. E. Lorberg et G. Kirchhoff, a été, nous l'avons dit, adoptée par presque tous les physiciens. Elle n'est pas, cependant, sans présenter de graves causes de doute.

Les lois connues de l'Hydrostatique enseignent qu'en un point d'un fluide, la pression est normale à l'élément mené par ce point et indépendante, en grandeur, de l'orientation de l'élément. D'après Maxwell, il n'en serait pas ainsi à l'intérieur d'un fluide polarisé : la pression qui s'exerce sur un élément normal aux lignes de force se changerait en tension pour les éléments parallèles aux lignes de force.

Cette difficulté n'avait pas échappé à Maxwell.

« L'hypothèse, dit-il (¹), d'un pareil état de tension existant au sein d'un diélectrique fluide, tel que l'air ou la térébenthine, peut paraître, à première vue, en contradiction avec le principe établi, qu'en un point d'un fluide les pressions sont égales dans tous les sens. Mais, quand on établit ce principe en considérant la mobilité et l'équilibre des parties du fluide, on admet précisément qu'il n'existe dans le fluide aucune action du genre de celle que nous supposons se produire le long des lignes de force. L'état de tension que nous venons d'étudier est parfaitement compatible avec la mobilité et l'équilibre d'un fluide; car nous avons vu que,

---

(¹) J.-Cl. Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traduit en français par G. Seligmann-Lui, t. I, p. 173.

si une portion du fluide n'a point de charge électrique, elle n'est soumise à aucune force résultante due aux tensions sur la surface, si intenses que soient ces tensions. C'est seulement quand une partie du fluide est chargée que son état d'équilibre est troublé par les tensions agissant sur sa surface, et nous savons qué, dans ce cas, elle tend effectivement à se mouvoir; donc l'état de tension supposé n'est pas incompatible avec l'équilibre d'un diélectrique fluide. »

Les difficultés de la théorie de Maxwell ont été profondément étudiées par M. M. Brillouin (1) et par M. E. Beltrami (2), sans que ces auteurs soient parvenus à les surmonter.

E. Mathieu (3) a démontré également que la théorie de Maxwell ne pouvait s'accorder avec les principes de la théorie de l'élasticité.

Enfin, dans le bel Ouvrage qu'il a consacré récemment à l'exposé des idées de Maxwell, M. Poincaré (4) insiste de nouveau sur les paradoxes nombreux que soulève la théorie des actions élastiques au sein des diélectriques.

Tous les auteurs éminents que nous venons de citer, en signalant les nombreuses difficultés de la théorie de Maxwell, regardent ces difficultés comme des paradoxes qui seront un jour expliqués, et continuent à croire à la vérité de cette théorie. Aucun ne va jusqu'à regarder comme inexacte l'expression, donnée par le physicien anglais, des pressions au sein d'un milieu polarisé.

C'est pourtant là la conclusion à laquelle nous nous arrêterons.

Nous avons repris, dans les deux Chapitres précédents, l'étude des corps polarisés, solides ou fluides, en cherchant à y mettre

---

(1) M. Brillouin, *Essai sur les lois d'élasticité d'un milieu capable de transmettre des actions en raison inverse du carré de la distance* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. IV, p. 201; 1887).

(2) E. Beltrami, *Sull' interpretazzione meccanica delle formole di Maxwell* (*Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Instituto di Bologna,* séance du 14 février 1886).

(3) É. Mathieu, *Théorie du potentiel.* Deuxième Partie : *Électrostatique et Magnétisme,* p. 110.

(4) H. Poincaré, *Électricité et Optique.* I : *Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière,* p. 88.

une complète rigueur, à dissiper tous les doutes. Nous avons reconnu :

1° Que les pressions à l'intérieur d'un semblable milieu ne sont pas déterminées par les lois données par Maxwell, même lorsqu'on admet les approximations adoptées par Maxwell ;

2° Que les déformations du milieu ne sont pas liées aux six fonctions dont dépendent les pressions par les lois qui expriment cette même relation au sein d'un solide non polarisé.

Ainsi, pour nous, les difficultés que présente la théorie de Maxwell ne sont pas des paradoxes qui doivent tôt ou tard trouver leur explication, mais des contradictions qui en mettent à nu l'inexactitude et la doivent faire rejeter. Au premier rang de ces contradictions, citons celle qui consiste à admettre, au sein d'un fluide, l'existence d'une pression qui n'est pas normale à l'élément sur lequel elle agit, ni indépendante de l'orientation de cet élément.

L'expérience, d'ailleurs, nous laisse à l'aise pour rejeter la théorie de Maxwell. Elle a constaté, en effet, que les corps polarisés se dilataient dans les directions normales aux lignes de force, ce qui s'accorde aussi bien avec notre théorie qu'avec celle de Maxwell ; mais elle n'a jamais constaté la contraction dans le sens des lignes de force annoncée par la théorie que nous repoussons ; M. Quincke (1) a même cru constater qu'un diélectrique polarisé se dilatait uniformément en tout sens. Il est vrai que sa méthode, comme l'a fait remarquer M. J. Curie (2), n'est pas exempte de critiques.

Nous rejetterons donc complètement la théorie de Maxwell, pour conserver uniquement la théorie, conforme aux principes de l'Hydrostatique et de l'Élastique, que nous avons développée dans les deux Chapitres précédents.

§ 2. — Cause de l'inexactitude de la théorie de Maxwell.

La théorie de Maxwell, tout erronée qu'elle nous paraisse, a été

(1) QUINCKE, *Ueber electrische Ausdehnung* (*Monatsber. der Berl. Akad. der Wiss*, p. 200; 1880).
(2) *Voir* POINCARÉ, *Électricité et Optique*, t. I, p. 296.

adoptée et admirée par des physiciens si éminents, que nous ne voulons point nous contenter de cette fin de non-recevoir; nous allons exposer ici la méthode qui sert à démontrer les formules de cette théorie pour marquer le point précis où l'erreur se glisse dans la suite des raisonnements. L'exposé que nous allons donner se rapproche beaucoup de celui de M. H. von Helmholtz. Comme cet illustre physicien, nous nous bornerons à l'étude des fluides polarisés; les remarques que nous ferons s'étendraient sans peine aux solides.

L'exposé que nous allons présenter ne servira pas seulement à mettre en évidence le point erroné de la théorie de Maxwell. Il aura aussi l'avantage de nous faire connaître plusieurs formules intéressantes.

Considérons un fluide magnétique quelconque, placé sous l'action d'aimants permanents et sur lequel l'équilibre magnétique est établi. Donnons à ce fluide une modification infiniment petite quelconque, consistant en un changement de forme infiniment petit et en un changement d'aimantation infiniment petit. Cette modification peut se décomposer en deux autres : 1° un changement d'aimantation sans changement de forme; 2° un changement de forme sans changement d'aimantation.

Comme l'équilibre magnétique est supposé établi sur le fluide, la première modification n'entraîne aucun travail non compensé. Le travail non compensé effectué dans la modification totale se réduit donc au travail non compensé effectué dans la seconde modification partielle. Ce travail non compensé peut être regardé comme le travail des actions qui tendent à déformer le fluide; s'il est égal à o, le fluide est en équilibre.

Ce travail non compensé se compose de deux parties. L'une demeurerait inaltérée si la même modification était imposée au même fluide préalablement ramené à l'état neutre; l'autre s'annulerait dans ces conditions. Désignons cette dernière par $d\tau$ et calculons-la.

Si l'on se reporte aux notations employées dans les Chapitres précédents [Chap. I, égalités (11) et (14)], on a

$$d\tau = -(B + C' + C'' + C''')$$

ou bien [Chap. I, égalités (13), (15), (16), (17)],

$$
(8) \left\{
\begin{aligned}
d\tau = & -\int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma) + \sigma \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \right] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dv \\
& + \int \Big\{ \left[\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \right] u \\
& \quad + \left[\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right] v \\
& \quad + \left[\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right] w \Big\} dv \\
& + \mathbf{S} \left\| \mathcal{A} \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x} \right\| \cdot \left\| u \cos(N_i, x) \right\| dS.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
(9) \qquad P = \left\| \mathcal{A} \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x} \right\| + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma) + \sigma \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma},
$$

$$
(10) \left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial P}{\partial x} - \left[\mathcal{A} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x\, \partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x\, \partial z} \right], \\
Y &= \frac{\partial P}{\partial y} - \left[\mathcal{A} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial y\, \partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial y^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial y\, \partial z} \right], \\
Z &= \frac{\partial P}{\partial z} - \left[\mathcal{A} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial z\, \partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial z\, \partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial^2(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial z^2} \right],
\end{aligned}
\right.
$$

et l'égalité (8) deviendra

$$
(11) \left\{
\begin{aligned}
d\tau = & \ \mathbf{S}\, P[u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i z)]\, dS \\
& + \int (X u + Y v + Z w)\, dv.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on se reporte aux égalités (18), (19) et (20) du Chap. I, on pourra écrire les égalités (9) et (10) sous la forme suivante

$$
(9\ bis) \qquad P = \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma) - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \sigma)} + \sigma \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma},
$$

$$
(10\ bis) \left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \right] - \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\
Y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \right] - \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\
Z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \right] - \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces égalités sont générales. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un fluide dont le coefficient d'aimantation soit, comme l'exige la théorie de Poisson, indépendant de l'intensité d'aimantation. Ce coefficient est une simple fonction $k(\sigma)$ du volume spécifique σ et l'on a

$$F(\mathfrak{M}, \sigma) = k(\sigma),$$

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \sigma) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2k(\sigma)}.$$

Les égalités (9 *bis*) et (10 *bis*) deviennent alors

$$(9\ ter) \qquad P = -\frac{\mathfrak{M}^2}{2k^2(\sigma)}\left[k(\sigma) + \sigma\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right],$$

$$(10\ ter) \quad \begin{cases} X = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\mathfrak{M}^2}{k^2(\sigma)}\sigma\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right] + \dfrac{\mathfrak{M}^2}{2k(\sigma)}\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}, \\ Y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\mathfrak{M}^2}{k^2(\sigma)}\sigma\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right] + \dfrac{\mathfrak{M}^2}{2k(\sigma)}\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}, \\ Z = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{\mathfrak{M}^2}{k^2(\sigma)}\sigma\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right] + \dfrac{\mathfrak{M}^2}{2k(\sigma)}\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces égalités ont déjà été obtenues par M. H. von Helmholtz [*loc. cit.*, égalités (45)].

Elles permettent d'exprimer $d\tau$ au moyen des dérivées partielles des deux quantités $k(\sigma)$ et $\mathfrak{M}^2$. A cette dernière quantité on peut se proposer de substituer les dérivées partielles de la fonction potentielle magnétique, en partant des égalités

$$(12) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -k(\sigma)\dfrac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial x}, \\ \mathfrak{B} = -k(\sigma)\dfrac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial y}, \\ \mathfrak{C} = -k(\sigma)\dfrac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{V})}{\partial z}, \end{cases}$$

qui représentent les conditions de l'équilibre magnétique. Ces égalités donnent, en effet,

$$\mathfrak{M}^2 = k^2(\sigma)\Pi(\mathcal{V} + \mathfrak{V}),$$

relation qui, reportée dans les égalités (9 *ter*) et (10 *ter*), leur

donne la forme suivante

$$(13) \qquad \mathrm{P} = -\left[k(\sigma) + \sigma \frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right] \Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}'),$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma \frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')\right] + \frac{1}{2}\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}'), \\ \mathrm{Y} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\sigma \frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')\right] + \frac{1}{2}\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}'), \\ \mathrm{Z} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma \frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')\right] + \frac{1}{2}\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}'). \end{aligned} \right.$$

Ces expressions peuvent se mettre sous une autre forme. Considérons l'égalité

$$\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial z} = -\frac{\Delta(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{4\pi}.$$

En vertu des égalités (12), elle devient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left\{[1 + 4\pi k(\sigma)]\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial x}\right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{[1 + 4\pi k(\sigma)]\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial y}\right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left\{[1 + 4\pi k(\sigma)]\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial z}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\dfrac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial x}$ et nous obtiendrons l'égalité suivante

$$\begin{aligned} &\frac{dk(\sigma)}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}') + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')\right\} \\ &= 2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\left[\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial x}\right]^2\right\} \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial x}\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial y}\right\} \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial x}\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathfrak{V}')}{\partial z}\right\}. \end{aligned}$$

Moyennant cette égalité, l'expression de X, donnée par la pre-

mière des égalités (12), devient

$$(15)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\left[\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial x}\right]^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)+\sigma\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mho+\varphi)\right\} \\ \qquad +\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial x}\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial y}\right\} \\ \qquad +\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial x}\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial z}\right\}. \end{cases}$$

Les expressions de Y et de Z peuvent se mettre sous une forme analogue. Posons

$$(3)\quad \begin{cases} N_1 = \left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\left[\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial x}\right]^2 - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)+\sigma\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mho+\varphi), \\ N_2 = \left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\left[\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial y}\right]^2 - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)+\sigma\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mho+\varphi), \\ N_3 = \left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\left[\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial z}\right]^2 - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)+\sigma\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mho+\varphi), \\ T_1 = \left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial y}\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial z}, \\ T_2 = \left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial z}\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial x}, \\ T_3 = \left[\dfrac{1}{4\pi}+k(\sigma)\right]\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial x}\dfrac{\partial(\mho+\varphi)}{\partial y}, \end{cases}$$

et l'égalité (15) deviendra

$$(16)\qquad X = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}.$$

Les quantités Y et Z ont des expressions analogues.

Le travail non compensé des actions magnétiques qui tendent à déformer le fluide peut donc s'écrire, d'après les égalités (11), (13) et (16),

$$(17)\quad \begin{cases} d\tau = -\mathbf{S}\left[k(\sigma)+\sigma\dfrac{dk(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mho+\varphi)\,\|\,u\cos(N_i,x)\,\|\,dS \\ \qquad +\displaystyle\int\left[\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial x}+\dfrac{\partial T_3}{\partial y}+\dfrac{\partial T_2}{\partial z}\right)u \right. \\ \qquad\qquad +\left(\dfrac{\partial T_3}{\partial x}+\dfrac{\partial N_2}{\partial y}+\dfrac{\partial T_1}{\partial z}\right)v \\ \qquad\qquad \left. +\left(\dfrac{\partial T_2}{\partial x}+\dfrac{\partial T_1}{\partial y}+\dfrac{\partial N_3}{\partial z}\right)w\right]dv. \end{cases}$$

Nous avons supposé le fluide magnétique continu. Nous aurions pu le supposer formé de deux fluides distincts, séparés par une surface de discontinuité Σ. Désignons par N_i la normale vers l'intérieur du premier fluide à l'une des surfaces S ou Σ qui limitent le volume v du premier fluide et par N'_i la normale vers l'intérieur du second fluide à l'une des surfaces S' ou Σ qui limitent le volume v' du second fluide.

Désignons par

$$N'_1, \quad N'_2, \quad N'_3, \quad T'_1, \quad T'_2, \quad T'_3$$

ce que deviennent les quantités

$$N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3$$

lorsqu'on y remplace les quantités σ et $k(\sigma)$ relatives au premier fluide par les quantités σ' et $k(\sigma')$ relatives au second. Nous aurons, pour expression du travail non compensé des actions qui tendent à déformer les deux fluides,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} d\tau = & \int \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) u + \ldots \right] dv \\ & + \int \left[\left(\frac{\partial N'_1}{\partial x'} + \frac{\partial T'_3}{\partial y'} + \frac{\partial T'_2}{\partial z'} \right) u' + \ldots \right] dv' \\ & - \mathrm{S} \left[k(\sigma) + \sigma \frac{dk(\sigma)}{d\sigma} \right] \Pi(\mho + \wp) \| u \cos(N_i, x \| dS \\ & - \mathrm{S} \left[k'(\sigma') + \sigma' \frac{dk'(\sigma')}{d\sigma'} \right] \Pi'(\mho + \wp) \| u' \cos(N'_i, x) \| dS' \\ & - \mathrm{S} \left\{ \left[k(\sigma) + \sigma \frac{dk(\sigma)}{d\sigma} \right] \Pi(\mho + \wp) \| u \cos(N_i, x) \| \right. \\ & \left. + \left[k'(\sigma') + \sigma' \frac{dk'(\sigma')}{d\sigma'} \right] \Pi'(\mho + \wp) \| u' \cos(N'_i, x) \| \right\} d\Sigma. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité est due à M. von Helmholtz [1].

Imaginons, en particulier, qu'il s'agisse d'un corps magnétique plongé dans un milieu illimité qui est lui-même magnétique. La surface désignée par S s'évanouit. La surface Σ devient la surface même du corps. L'intégrale relative à la surface S', rejetée à l'infini, est égale à o, si, à l'infini, $(\mho + \wp)$ se comporte comme une

(1) H. von Helmholtz, *loc. cit.* (*Wiss. Abhandlnngen,* t. I, p. 814).

fonction potentielle. Si nous remarquons qu'en tout point de la surface Σ on a

$$\| u \cos(N_i, x) \| + \| u' \cos(N'_i, x) \| = 0,$$

qu'on a d'ailleurs

$$\Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{P}) = \frac{\mathfrak{M}^2}{k(\sigma)},$$

$$\Pi'(\mathfrak{V} + \mathfrak{P}) = \frac{\mathfrak{M}'^2}{k'(\sigma')},$$

on voit que l'égalité (18) devient, dans ce cas,

$$(19) \left\{ \begin{aligned} d\tau = & \int \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) u + \ldots \right] dv \\ & + \int \left[\left(\frac{\partial N'_1}{\partial x'} + \frac{\partial T'_3}{\partial y'} + \frac{\partial T'_2}{\partial z'} \right) u' + \ldots \right] dv' \\ & - \mathrm{S} \Big\{ \left[k(\sigma) + \sigma \frac{d\,k(\sigma)}{d\sigma} \right] \Pi(\mathfrak{V} + \mathfrak{P}) \\ & \quad - \left[k'(\sigma') + \sigma' \frac{d\,k'(\sigma')}{d\sigma'} \right] \Pi'(\mathfrak{V} + \mathfrak{P}) \Big\} \| u \cos(N_i, x) \| \, d\Sigma \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(19\,bis) \left\{ \begin{aligned} d\tau = & \int \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) u + \ldots \right] dv \\ & + \int \left[\left(\frac{\partial N'_1}{\partial x'} + \frac{\partial T'_3}{\partial y'} + \frac{\partial T'_2}{\partial z'} \right) u' + \ldots \right] dv' \\ & \mathrm{S} \Big\{ \left[1 + \sigma \frac{d}{d\sigma} \log k(\sigma) \right] \mathfrak{M}^2 \\ & \quad - \left[1 + \sigma' \frac{d}{d\sigma'} \log k'(\sigma') \right] \mathfrak{M}'^2 \Big\} \| u \cos(N_i, x) \| \, d\Sigma. \end{aligned} \right.$$

Il est aisé de voir que la théorie de Maxwell serait exacte si, au lieu de ces équations (19) ou (19 *bis*), on avait l'équation

$$(20) \left\{ \begin{aligned} d\tau = & \int \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) u + \ldots \right] dv \\ & + \int \left[\left(\frac{\partial N'_1}{\partial x'} + \frac{\partial T'_3}{\partial y'} + \frac{\partial T'_2}{\partial z'} \right) u' + \ldots \right] dv' \\ & + \mathrm{S} [(N_1 - N'_1) \cos(N_i, x) + (T_3 - T'_3) \cos(N_i, y) + (T_2 - T'_2) \cos(N_i, z)] \, u \, d\Sigma \\ & + \mathrm{S} [(T_3 - T'_3) \cos(N_i, x) + (N_2 - N'_2) \cos(N_i, y) + (T_1 - T'_1) \cos(N_i, z)] \, v \, d\Sigma \\ & + \mathrm{S} [(T_2 - T'_2) \cos(N_i, x) + (T_1 - T'_1) \cos(N_i, y) + (N_3 - N'_3) \cos(N_i, z)] \, w \, d\Sigma. \end{aligned} \right.$$

Cette équation (20) est précisément celle qu'a proposée M. Lorberg [1].

Mais il est aisé de voir que les trois intégrales relatives à la surface Σ que renferme l'équation (20) ne se réduisent pas à l'intégrale relative à la surface Σ que renferme l'équation (19 *bis*).

Si l'on se reporte, en effet, aux égalités (3), on trouve

$$\begin{aligned} & N_1 \cos(N_i, x) + T_3 \cos(N_i, y) + T_2 \cos(N_i, z) \\ & = \left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right] \frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial N_i} \frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial x} \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma) + \sigma \frac{d k(\sigma)}{d\sigma}\right] \Pi(\mathfrak{V} + \mathcal{V}). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} & N'_1 \cos(N'_i, x) + T'_3 \cos(N'_i, y) + T'_2 \cos(N'_i, z) \\ & = \left[\frac{1}{4\pi} + k'(\sigma')\right] \frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial N'_i} \frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial x'} \\ & - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} + k'(\sigma') + \sigma' \frac{d k'(\sigma')}{d\sigma'}\right] \Pi'(\mathfrak{V} + \mathcal{V}) \cos(N'_i, x). \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right] \frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial N_i} + \left[\frac{1}{4\pi} + k'(\sigma')\right] \frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial N'_i} = 0.$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned} & (N_1 - N'_1) \cos(N_i, x) + (T_3 - T'_3) \cos(N_i, y) + (T_2 - T'_2) \cos(N_i, z) \\ & = \left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right] \frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial N_i} \left[\frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial x} - \frac{\partial(\mathfrak{V} + \mathcal{V})}{\partial x'}\right] \\ & - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma) + \sigma \frac{d k'(\sigma)}{d\sigma}\right] \Pi(\mathfrak{V} + \mathcal{V}) \cos(N_i, x) \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} + k'(\sigma') + \sigma' \frac{d k(\sigma')}{d\sigma'}\right] \Pi'(\mathfrak{V} + \mathcal{V}) \cos(N_i, x). \end{aligned}$$

Si l'on compare ce terme, coefficient de $u\, d\Sigma$ au second membre de l'égalité (20), au coefficient de la même quantité $u\, d\Sigma$ au se-

[1] E. LORBERG, *Ueber Elektrostriction* (*Wiedemann's Annalen*, t. XXI, p. 314; 1884).

cond membre de l'égalité (19), on trouve que ce dernier surpasse le premier de

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} - k'(\sigma') - \sigma'\frac{d\,k'(\sigma')}{d\sigma'}\right]\Pi'(\mathcal{V}+\mathfrak{V})\cos(N_i, x) \\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi} - k(\sigma) - \sigma\frac{d\,k(\sigma)}{d\sigma}\right]\Pi(\mathcal{V}+\mathfrak{V})\cos(N_i, x) \\
&-\left[\frac{1}{4\pi} + k(\sigma)\right]\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial N_i}\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x'}\right].
\end{aligned}
$$

Cette quantité est-elle égale à o? Pour nous en rendre compte, supposons qu'au point considéré la direction N_i soit celle de l'axe des x. Nous aurons alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x} &= \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial N_i}, &\qquad \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial x'} &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial N'_i}, \\
\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y} &= \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y'}, &\qquad \frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z} &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z'},
\end{aligned}
$$

et la quantité précédente deviendra

$$
\begin{aligned}
&\left[k(\sigma) - k'(\sigma') + \sigma\frac{d\,k(\sigma)}{d\sigma} - \sigma'\frac{d\,k'(\sigma')}{d\sigma'}\right]\left\{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial z}\right]^2\right\} \\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4\pi} - k(\sigma) + \sigma\frac{d\,k(\sigma)}{d\sigma}\right]\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial N_i}\right]^2 \\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4\pi} - k'(\sigma') + \sigma'\frac{d\,k'(\sigma')}{d\sigma'}\right]\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial N'_i}\right]^2,
\end{aligned}
$$

quantité qui n'est certainement pas nulle en général. Les équations (19) ou (19 *bis*) ne se réduisent donc pas à l'équation (20), et la théorie de Maxwell, contre laquelle militent tant d'objections, repose sur une démonstration inexacte, en sorte que tout conspire à la faire rejeter.



CHAPITRE IV.

LES DÉFORMATIONS ÉLECTRIQUES DES CRISTAUX.

Nous serons très brefs dans l'étude de la déformation électrique des cristaux.

Cette étude n'offre pas de difficultés de principes plus grandes que celles que l'on rencontre dans l'étude de la déformation des corps isotropes polarisés; mais elle conduit à des formules beaucoup plus longues et beaucoup plus compliquées. C'est cette complication des formules que nous chercherons à éviter en indiquant seulement la marche du raisonnement qui fournit l'expression des quantités à déterminer, et en n'écrivant point cette expression.

La marche à suivre dans la formation de l'équation d'équilibre d'un cristal polarisé dans un champ est exactement la marche suivie au Chapitre II; mais :

1° L'équation (1) doit être remplacée par une équation de la forme

$$(1) \qquad E(\Upsilon - T\Sigma) = \Omega + \frac{1}{2}\int \left[a_{11}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] dv,$$

$a_{11}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right]$ étant une forme quadratique quelconque des six déformations.

2° D'après ce qui a été dit au Livre X, Chap. IV, § 1, l'expression (2) doit être remplacée par une expression de la forme

suivante

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \Big\{ \left(l_0 + l_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{A} + \left(m_0 + m_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{B} \\ \qquad\qquad + \left(n_0 + n_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{C} \\ \qquad + \left[\left(p_0 + p_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{A}^2 + \ldots\right] \Big\} dv, \end{cases}$$

$$\left(l_0 + l_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right),$$
$$\left(m_0 + m_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right),$$
$$\left(n_0 + n_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right),$$
$$\left(p_0 + p_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

étant des fonctions linéaires des six déformations, et

$$\left[\left(p_0 + p_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{A}^2 + \ldots\right]$$

étant une fonction homogène et du second degré de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Dès lors, le travail externe continue à être donné, comme dans l'égalité (4) du Chapitre II, par la formule

$$(3)\qquad d\mathfrak{T}_e = \int \rho\,(Xu + Yv + Zw)\,dv + \mathbf{S}\,P \,\Big\|\, u\cos(P, x) \,\Big\|\, dS.$$

Mais la formule (5) du Chapitre II prend une forme beaucoup plus compliquée

$$(4)\qquad A = \int \left(a_{11} \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots\right) dv.$$

La formule (6) du Chapitre II prend la forme également très compliquée

$$(5)\quad \begin{cases} B = \displaystyle\int \Big\{ \left(l_0 + l_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{A} + \left(m_0 + m_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{B} \\ \qquad\qquad + \left(n_0 + n_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{C} \\ \qquad + \left[\left(p_0 + p_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right) \mathcal{A}^2 + \ldots\right] \Big\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dv \\ \quad + \displaystyle\int \left[\left(l_1 \mathcal{A} + m_1 \mathcal{B} + n_1 \mathcal{C} + p_1 \mathcal{A}^2 + \ldots\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots\right] dv. \end{cases}$$

Enfin, la quantité C est encore donnée par l'égalité (7) du Chapitre II; mais, si l'on observe que l'on a

$$l_0 + l_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots + 2\left(p_0 + p_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\mathcal{A} + \ldots = -\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial x},$$

. . . .

en vertu des conditions de l'équilibre magnétique; si l'on pose en outre

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \left(l_0 + l_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\mathcal{A} + \left(m_0 + m_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\mathcal{B} \\ &\qquad + \left(n_0 + n_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\mathcal{C}, \\ \psi &= \left[\left(p_0 + p_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\mathcal{A}^2 + \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

on aura

$$\left\| \mathcal{A} \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial x} \right\| = -\varphi - 2\psi$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{Q})}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \\ &\quad = -\left(l_0 + l_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} - \left(m_0 + m_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} \\ &\qquad - \left(n_0 + n_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} - \left[\left(p_0 + p_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial \mathcal{A}^2}{\partial x} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

L'égalité (7) du Chapitre II prend donc ici la forme suivante :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} C &= \mathbf{S}\,(\varphi + 2\psi)\left\| u\cos(N_i, x)\right\| dS \\ &\quad + \int \Bigg\{ \left(l_0 + l_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \left(m_0 + m_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} \\ &\qquad + \left(n_0 + n_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \\ &\qquad + \left[\left(p_0 + p_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots\right)\frac{\partial \mathcal{A}^2}{\partial x} + \ldots\right]\Bigg\} u\,dv + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Écrivons que

$$A + B + C - d\mathfrak{T}_e = 0,$$

après avoir transformé les expressions (4) et (5) de A et B au

moyen d'intégrations par parties. Nous aurons, toute réduction faite,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{S}\Big\{\Big[\psi-(l_1\mathcal{A}+m_1\mathcal{B}+n_1\mathcal{C}+p_1\mathcal{A}^2+\ldots)-a_{11}\frac{\partial U}{\partial x}-\ldots\Big]\cos(N_i,x)\\ &\qquad+\Big[\ldots\Big]\cos(N_i,y)+\Big[\ldots\Big]\cos(N_i,z)-P\cos(P,x)\Big\}\,u\,dS\\ &+\mathbf{S}\Big\{\ldots\Big\}\,v\,dS+\mathbf{S}\Big\{\ldots\Big\}\,w\,dS\\ &-\int\Big[\rho X+a_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\psi)\\ &\qquad+\frac{\partial}{\partial x}(l_1\mathcal{A}+m_1\mathcal{B}+\mathcal{C}+p_1\mathcal{A}^2+\ldots)\\ &\qquad+\frac{\partial}{\partial y}(\ldots)+\frac{\partial}{\partial z}(\ldots)\Big]\,u\,dv\\ &-\int\Big[\ldots\Big]\,v\,dv-\int\Big[\ldots\Big]\,w\,dv=0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient u, v, w. Par des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits au Chapitre II, nous trouverons que l'on doit avoir :

1° En tout point du milieu cristallin, trois équations dont la première est

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &a_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\psi)\\ &\quad=-\rho X-\frac{\partial}{\partial x}(l_1\mathcal{A}+m_1\mathcal{B}+n_1\mathcal{C}+p_1\mathcal{A}^2+\ldots)\\ &\qquad-\frac{\partial}{\partial y}(\ldots)-\frac{\partial}{\partial z}(\ldots); \end{aligned}\right.$$

2° En tout point de la surface du cristal, trois équations dont la première est

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[\psi-a_{11}\frac{\partial U}{\partial x}+\ldots\Big]\cos(N_i,x)+\Big[\ldots\Big]\cos(N_i,y)+\Big[\ldots\Big]\cos(N_i,z)\\ &\quad=(l_1\mathcal{A}+m_1\mathcal{B}+n_1\mathcal{C}+p_1\mathcal{A}^2+\ldots)\cos(N_i,x)\\ &\qquad+(\ldots)\cos(N_i,y)+(\ldots)\cos(N_i,z)+P\cos(P,x). \end{aligned}\right.$$

Les équations (9) sont les équations aux dérivées partielles du second ordre qui doivent être vérifiées en tout point du cristal par les déplacements U, V, W; les équations (10) sont les conditions que ces déplacements doivent vérifier aux limites du cristal.

L'intégration générale de ces équations conduirait à la solution du problème suivant : Trouver la déformation que subit un cristal diélectrique lorsqu'on le place dans un champ électrique. Nous n'aborderons ce problème que dans un cas extrêmement particulier.

Nous supposerons que le champ soit uniforme; nous supposerons, en outre, que le cristal soit très faiblement diélectrique, de telle sorte que, dans nos équations, nous ayons seulement à conserver les termes du premier degré par rapport aux quantités

$$\mathrm{U},\quad \mathrm{V},\quad \mathrm{W},\quad \mathcal{A},\quad \mathcal{B},\quad \mathcal{C}.$$

Nous supposerons enfin qu'aucune force extérieure n'agisse sur le cristal. On voit sans peine que si, dans ces conditions, on suppose les déformations uniformes à l'intérieur du cristal, ainsi que la polarisation, les équations (9) sont identiquement satisfaites.

La première des équations (10) va devenir

$$\begin{aligned}\left(a_{11}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\ldots\right)\cos(\mathrm{N}_i, x)+(\ldots)\cos(\mathrm{N}_i, y)+(\ldots)\cos(\mathrm{N}_i, z)\\ =[(l_0-l_1)\mathcal{A}+(m_0-m_1)\mathcal{B}+(n_0-n_1)\mathcal{C}]\cos(\mathrm{N}_i, x)\\ -[l_2\mathcal{A}+m_2\mathcal{B}+n_2\mathcal{C}]\cos(\mathrm{N}_i, y)\\ -[l_3\mathcal{A}+m_3\mathcal{B}+n_3\mathcal{C}]\cos(\mathrm{N}_i, z).\end{aligned}$$

Nous avons supposé que l'équilibre électrique était établi sur le cristal; nous avons supposé, en outre, que le cristal ne renfermait pas d'électricité libre; ces deux hypothèses ne sont compatibles que si le cristal n'est pas naturellement pyro-électrique. Nous devons donc poser

$$l_0=0,\qquad m_0=0,\qquad n_0=0,$$

en sorte que l'équation précédente devient la première des équations

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(a_{11}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\ldots\right)\cos(\mathrm{N}_i, x)+(\ldots)\cos(\mathrm{N}_i, y)+(\ldots)\cos(\mathrm{N}_i, z)\\ &\quad=-(l_1\mathcal{A}+m_1\mathcal{B}+n_1\mathcal{C})\cos(\mathrm{N}_i, x)\\ &\quad\quad-(l_2\mathcal{A}+m_2\mathcal{B}+n_2\mathcal{C})\cos(\mathrm{N}_i, y)\\ &\quad\quad-(l_3\mathcal{A}+m_3\mathcal{B}+n_3\mathcal{C})\cos(\mathrm{N}_i, z),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Ces trois équations seront vérifiées en tout point de la surface

qui limite le cristal, si l'on peut égaler séparément, dans chacune d'elles, les coefficients de $\cos(N_i, x)$, $\cos(N_i, y)$, $\cos(N_i, z)$. On obtient ainsi neuf équations

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots = l_1 \mathcal{A} + m_1 \mathcal{B} + n_1 \mathcal{C}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

qui se réduisent à six; en sorte que les six déformations sont déterminées, en fonction de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, par six équations linéaires.

Deux cas sont à distinguer :

1° *Le corps n'est ni pyro-électrique ni piézo-électrique.*

On a alors

$$\begin{array}{lll} l_1 = 0, & l_2 = 0, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots. \end{array}$$

Les équations (12) deviennent

$$\begin{array}{l} a_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Elles donnent

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Si donc on place dans un champ uniforme un cristal faiblement diélectrique, qui n'est ni pyro-électrique ni piézo-électrique, les déformations que ce cristal éprouve sont d'un ordre de petitesse plus élevé que la polarisation qu'il prend. En général, elles seront inaccessibles à l'expérience.

2° *Le corps est piézo-électrique.*

Dans ce cas, les quantités

$$\begin{array}{l} l_1, \ l_2, \ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ne sont pas toutes égales à zéro. Les équations (12) déterminent les six déformations en fonctions linéaires et homogènes des com-

posantes de la polarisation; par conséquent, aussi en fonctions linéaires et homogènes des composantes du champ.

Si donc on place dans un champ uniforme un cristal faiblement diélectrique et piézo-électrique, les déformations que ce cristal éprouve sont du même ordre de grandeur que la polarisation qu'il prend.

Ces déformations varient proportionnellement à l'intensité du champ dans lequel le cristal est placé. Elles changent de sens avec le champ.

Ces phénomènes ont été constatés par l'expérience.

Lorsque MM. P. et J. Curie eurent démontré la possibilité d'électriser certains cristaux par la compression, M. G. Lippmann (1) annonça, comme conséquence des principes de la Thermodynamique, que les dimensions de ces cristaux devaient varier lorsqu'on plaçait les cristaux dans un champ électrique.

Peu de temps après, MM. P. et J. Curie (2) reconnaissaient par l'expérience le fait annoncé par M. Lippmann : une plaque de quartz, taillée normalement à un axe d'hémiédrie, et placée entre les deux plateaux d'un condensateur, subit une dilatation ou une contraction; la dilatation est proportionnelle à la différence de niveau potentiel qui existe entre les deux plateaux et en raison inverse de leur distance.

Par des méthodes optiques, M. Röntgen (3) et M. Kundt (4) ont vérifié le fait découvert par MM. P. et J. Curie.

Nous arrêterons là l'étude des déformations électriques des cristaux. Nous avons marqué la méthode par laquelle on pourrait obtenir les lois entièrement générales de cette déformation. La présente ébauche pourrait donc servir de point de départ à une théorie complète et étendue de cette classe de phénomènes. Nous

---

(1) G. Lippmann, *Principe de la conservation de l'électricité* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXIV, p. 145; 1881).

(2) P. et J. Curie, *Déformations électriques du quartz* (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 914; 1882).

(3) Röntgen, *Ueber die durch electrische Kräfte erzeugte Aenderung der Doppellbrechung des Quarzes* (*Wiedemann's Annalen*, t. XVIII, p. 213 et 534; 1885).

(4) Kundt, *Ueber das optische Verhalten des Quarzes im elektrischen Felde* (*Wiedemann's Annalen*, t. XVIII, p. 228; 1883).

ne développerons pas cette théorie qui allongerait outre mesure le présent Volume ; ce que nous avons dit suffit à montrer comment le phénomène de la dilatation électrique des cristaux vient prendre place dans le tableau, parfaitement ordonné, des phénomènes magnétiques et diélectriques qui nous est tracé par la Thermodynamique.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

LIVRE VII.

Les forces magnétiques.

LIVRE VIII.

L'aimantation par influence selon la théorie de Poisson.

LIVRE IX.

L'aimantation par influence et la Thermodynamique.

LIVRE X.

L'aimantation des corps cristallisés.

LIVRE XI.

Les corps diélectriques.

LIVRE XII.

Les déformations des corps polarisés.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

17755 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

